Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Funciones y Geometría en $\mathbb{R}^n$

17 de marzo de 2014

Problema 1 [Grafos].- Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada.

1. Muestre que si $G(f)$ es un espacio vectorial, entonces f es lineal.
2. Muestre la recíproca de la proposición anterior
3. Deduzca en que condiciones las funciones lineales son biyectivas
4. Bosqueje el grafo de la función $f(x,y) = x + y$ e interprete geométricamente la primera propiedad.

Problema 2 [Funciones en $\mathbb{R}^n$].-

1. Bosqueje las curvas de nivel de las funciones $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = (x+y)^2 + x + y$.
2. Bosqueje el grafo de la función $f(x,y) = h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}$ en $\{(x,y)|x,y \geq 0 \wedge x^2+y^2 \leq r^2\}$ donde h y r son parámetros positivos conocidos.

Problema 3 [Normas].-

1. Muestre que existen constantes c_1, c_2 tales que $c_1||\vec{x}||_\infty \leq ||\vec{x}|| \leq c_2||\vec{x}||_\infty$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
2. Muestre que existen constantes c_1, c_2 tales que $c_1||\vec{x}||_2 \leq ||\vec{x}||_1 \leq c_2||\vec{x}||_2$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
3. Demuestre que $|||x|| - ||y||| \leq ||x-y||$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$
4. (Paralelógramo) Demuesre que $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$
5. (Polarización) Pruebe que $x \cdot y = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

Problema 4 [Funciones Lipschitz].- Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y suponga que $\exists\, c \in (0,1)$ tal que $\forall\, x, y \in D$ $||f(x) - f(y)|| \leq c||x-y||$. Sea $x_0 \in D$ y defina la sucesión $x_{k+1} = f(x_k)$

1. Muestre que $||x_{k+1} - x_k|| \leq c^k||x_1 - x_0||$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
2. Muestre que $||x_{k+l} - x_k|| \leq \frac{c^k}{1-c}||x_1 - x_0||$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Use esto para concluir que la sucesión (x_n) es de Cauchy.
3. Demuestre que existe $x^\star \in D$ tal que $f(x^\star) = x^\star$