

Clase Auxiliar 11: Convexidad.

Profesor: Aris Daniilidis.

Auxiliares: Daniel Contreras, Juan Pablo Donoso, Diego Gramusset, Donato Vásquez.

Propiedades útiles: Sea $f : C \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, con X e.v.n., f una función convexa y C un conjunto convexo.

- f es convexa si y solo si $\text{epi}(f)$ es un conjunto convexo.
- f es convexa, entonces $S_\alpha(f)$ es un conjunto convexo para $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ familia de conjunto convexos, entonces $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ es convexo.
- Los conjuntos C° y $\overline{C}$ son convexos.
- Sea Y e.v., y $g : Y \rightarrow X$ lineal afín. Consideremos ahora $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces $f \circ g$ es convexa.

P1. (a) Sean X, Y dos e.v. y sea $C \subset X$ un conjunto convexo. Consideremos una aplicación afín $A : X \rightarrow Y$, esto es, que tiene la forma:

$$A(x) = f(x) + y_0$$

con $f : X \rightarrow Y$ una función lineal y $y_0 \in Y$. Entonces $A(C)$ es convexo en Y .

- (b) Deduzca de lo anterior que, dados conjuntos convexos $S_1, S_2 \subset X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $S_1 + S_2$ y αS_2 son conjuntos convexos.
- (c) Demuestre que, dado $C \subset X$ un conjunto convexo con interior no vacío, y los puntos $y \in C^\circ$ y $x \in C$, entonces $tx + (1-t)y \in C^\circ$, para $t \in (0, 1)$. Deduzca de esto que $\overline{C} = \overline{C}^\circ$

P2. (a) Sea X un e.v.n. Demuestre que $C \subset X$ es convexo si y solo si C contiene al conjunto de combinaciones convexas de elementos de C , esto es:

$$\text{co}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, x_i \in C, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N} \right\} \subset C$$

- (b) Sea $C \subset X$ convexo y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Demuestre que, para $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in \text{co}(C)$ se tiene que:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i)$$

Esto último se le conoce como desigualdad de Jensen para sumatorias.

P3. Sea X e.v.n., y $A \subset X$ un conjunto cerrado de X no vacío. Recordamos la definición de la función *distancia al conjunto* A :

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

- (a) Demuestre que si A es convexo, entonces $d_A(\cdot)$ es convexa.
- (b) Recíprocamente, demuestre que si $d_A(\cdot)$ es convexa, entonces A es convexo.