Clase Auxiliar 11: Convexidad.

Profesor: Aris Daniilidis.

Auxiliares: Daniel Contreras, Juan Pablo Donoso, Diego Gramusset, Donato Vásquez.

Propiedades útiles: Sea $f : C \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, con X e.v.n., f una función convexa y C un conjunto convexo.

- f es convexa si y solo si $\text{epi}(f)$ es un conjunto convexo.
- f es convexa, entonces $S_\alpha(f)$ es un conjunto convexo para $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ familia de conjunto convexos, entonces $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ es convexo.
- Los conjuntos C° y $\overline{C}$ son convexos.
- Sea Y e.v., y $g : Y \rightarrow X$ lineal afín. Consideremos ahora $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces $f \circ g$ es convexa.

P1. (a) Sean X, Y dos e.v. y sea $C \subset X$ un conjunto convexo. Consideremos una aplicación afín $A : X \rightarrow Y$, esto es, que tiene la forma:

$$A(x) = f(x) + y_0$$

con $f : X \rightarrow Y$ una función lineal y $y_0 \in Y$. Entonces $A(C)$ es convexo en Y .

Solución:

Sean $y_1, y_2 \in A(C)$, y $\lambda \in (0, 1)$, el objetivo de esta parte del problema es demostrar que:

$$y_\lambda \doteq \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in A(C)$$

Sean entonces $x_1, x_2 \in C$ tales que $y_1 = A(x_1)$ y $y_2 = A(x_2)$, luego:

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 = \lambda(f(x_1) + y_0) + (1 - \lambda)(f(x_2) + y_0) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + y_0 = A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

Como C es convexo, entonces $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$, por lo tanto $y_\lambda \in A(C)$.

(b) Deduzca de lo anterior que, dados conjuntos convexos $S_1, S_2 \subset X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $S_1 + S_2$ y αS_2 son conjuntos convexos.

Solución:

Basta definirse $A : X \times X \rightarrow X$, como

$$A(x, y) = x + y$$

Claramente tenemos que A es lineal (entonces será lineal afín), así, como $S_1, S_2 \subset X$ son convexos, entonces $S_1 \times S_2 \subset X \times X$ es convexo, luego basta ver que

$$A(S_1 \times S_2) = S_1 + S_2$$

y concluimos por la parte anterior. La demostración para αS_2 es análoga, definiendo $A(x) = \alpha x$, que también resulta ser lineal.

(c) Demuestre que, dado $C \subset X$ un conjunto convexo con interior no vacío, y los puntos $y \in C^\circ$ y $x \in C$, entonces $tx + (1 - t)y \in C^\circ$, para $t \in (0, 1)$. Deduzca de esto que $\overline{C} = \overline{C^\circ}$.

Solución: Sea $t \in (0, 1)$, como queremos ver que $x_t \doteq tx + (1 - t)y \in C^\circ$, queremos probar que existe una bola centrada en x_t contenida en C .

Sea entonces $B_\varepsilon(y) \subset C$, la bola de centro y y radio $\varepsilon > 0$ contenida en C (esto es de la definición de que $y \in C^\circ$). Demostraremos que:

$$B_{(1-t)\varepsilon}(x_t) \subset C$$

Entonces, tomamos $y_0 \in B_{(1-t)\varepsilon}(x_t)$. Notemos que el punto $y + \frac{1}{1-t}(y_0 - x_t) \in B_\varepsilon(y)$

$$\|y + \frac{1}{1-t}(y_0 - x_t) - y\| \leq \frac{1}{1-t}\|y_0 - x_t\| \leq \frac{1}{1-t} \cdot (1-t)\varepsilon = \varepsilon$$

Entonces $y + \frac{1}{1-t}(y_0 - x_t) \in B_\varepsilon(y) \subset C$, entonces $y + \frac{1}{1-t}(y_0 - x_t) \in C$. Así, por convexidad tenemos que:

$$tx + (1-t)(y + \frac{1}{1-t}(y_0 - x_t)) \in C$$

pues es combinación convexa de dos elementos de C . Pero, desarrollando la última expresión vemos que:

$$tx + (1-t)(y + \frac{1}{1-t}(y_0 - x_t)) = \underbrace{tx + (1-t)y}_{x_t} + y_0 - x_t = y_0 \in C$$

vemos así que $y_0 \in C$, entonces $B_{(1-t)\varepsilon}(x_t) \subset C$, entonces $x_t \in C^\circ$ para todo $t \in (0, 1)$.

Veamos ahora que $\overline{C} = \overline{C^\circ}$. Claramente $\overline{C^\circ} \subset \overline{C}$, así que nos queda demostrar la otra inclusión. Sea $x \in \overline{C}$, entonces existe $(x_n) \subset C$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como $y \in C^\circ$, por la parte anterior tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $tx_n + (1-t)y \in C^\circ$ para todo $t \in (0, 1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definimos $t_n = 1 - \frac{1}{n} \in (0, 1)$, así

$$(t_n x_n + (1-t_n)y)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\circ$$

Por continuidad de la suma y la ponderación por escalar, vemos que:

$$t_n x_n + (1-t_n)y \rightarrow x$$

entonces $x \in \overline{C^\circ}$, con lo que concluimos que $\overline{C} = \overline{C^\circ}$.

P2. (a) Sea X un e.v.n. Demuestre que $C \subset X$ es convexo si y solo si C contiene al conjunto de combinaciones convexas de elementos de C , esto es:

$$co(C) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, x_i \in C, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N} \right\} \subset C$$

Solución:

Veamos que si $co(C) \subset C$, entonces C es convexo. Para esto, basta notar que C , al contener a todas las combinaciones convexas de elementos de C , en particular va a contener a las combinaciones convexas de dos elementos de C . Más precisamente, sean $x, y \in C$ y $\lambda \in (0, 1)$. Definamos $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = 1 - \lambda$, $x_1 = x$ y $x_2 = y$. Entonces

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \sum_{i=1}^2 \alpha_i x_i \in C$$

como esto es para todo par de puntos $x, y \in C$, y $\lambda \in (0, 1)$, concluimos que C es convexo.

Veamos ahora la otra implicancia, esto es, asumamos que C es convexo y veamos que entonces $co(C) \subset C$. Sea $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in co(C)$. Como tenemos que $\alpha_i \geq 0$ para todo i , y además $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, necesariamente existe $\alpha_{i_0} > 0$. Digamos que $\alpha_1 > 0$ (podemos suponer esto, pues para que ocurra basta cambiar los índices)

$$y_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x_2$$

Como y_0 corresponde a la combinación convexa de dos elementos de C , entonces $y_0 \in C$, pues estamos asumiendo que C es convexo. Notemos además que:

$$y_0 = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{i=1}^2 \alpha_i x_i$$

Definimos ahora:

$$y_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} y_0 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} x_3$$

Notamos que $y_1 \in C$, pues también es combinación convexa de dos elementos de C (y_0 y x_3). Vemos también que:

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i$$

Así, de manera inductiva, llegamos a que:

$$y_{k-2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k} y_{k-3} + \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k} x_k \in C$$

pero también vemos que:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k} y_{k-3} + \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k} x_k \in C$$

Que era lo que queríamos concluir.

- (b) Sea $C \subset X$ convexo y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Demuestre que, para $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in \text{co}(C)$ se tiene que:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i)$$

Esto último se le conoce como desigualdad de Jensen para sumatorias.

Solución:

Notemos que, por ser f convexa, tenemos que $\text{epi}(f)$ es un conjunto convexo, entonces por la parte (a), $\text{epi}(f)$ contiene a todas las combinaciones convexas de elementos de $\text{epi}(f)$. Vemos además que:

$$(x_i, f(x_i)) \in \text{epi}(f) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

luego

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i, f(x_i)) \in \text{epi}(f) \implies \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) \right) \in \text{epi}(f)$$

Que este último punto se encuentre en $\text{epi}(f)$ nos dice, por definición de $\text{epi}(f)$, que

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i)$$

y concluimos el resultado.

- P3.** Sea X e.v.n., y $A \subset X$ un conjunto cerrado de X no vacío. Recordamos la definición de la función *distancia al conjunto* A :

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

- (a) Demuestre que si A es convexo, entonces $d_A(\cdot)$ es convexa.

Sean $x, y \in X$, y $\varepsilon > 0$, por definición de ínfimo tenemos que existen $a_x, a_y \in A$ tales que:

$$\begin{aligned} \|x - a_x\| &\leq d_A(x) + \varepsilon \\ \|y - a_y\| &\leq d_A(y) + \varepsilon \end{aligned}$$

Sea entonces $\lambda \in (0, 1)$. Multiplicando la primera por λ y la segunda por $(1 - \lambda)$, y sumando ambas desigualdades, tenemos que

$$\begin{aligned} &\underbrace{\lambda \|x - a_x\| + (1 - \lambda) \|y - a_y\|}_{\geq \|\lambda x + (1 - \lambda)y - (\lambda a_x + (1 - \lambda)a_y)\|} \leq \lambda d_A(x) + (1 - \lambda) d_A(y) + \varepsilon \\ \implies &\|\lambda x + (1 - \lambda)y - \underbrace{(\lambda a_x + (1 - \lambda)a_y)}_{\in A, \text{ por convexidad de } A}\| \leq \lambda d_A(x) + (1 - \lambda) d_A(y) + \varepsilon \\ \implies &d_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda d_A(x) + (1 - \lambda) d_A(y) + \varepsilon \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos la desigualdad buscada.

(b) Recíprocamente, demuestre que si $d_A(\cdot)$ es convexa, entonces A es convexo.

Solución: La forma más directa de resolver esta parte es usando que los conjuntos de nivel de una función convexa son convexos, y el hecho de que A es cerrado si y solo si

$$A = \{x : d_A(x) = 0\}$$

Pero, como $d_A(\cdot)$ es no negativa, podemos escribir el conjunto anterior como el siguiente conjunto de nivel cero:

$$A = \{x : d_A(x) \leq 0\}$$

Como $d_A(\cdot)$ es una función convexa tenemos que A es convexo por ser el conjunto de nivel de una función convexa.