

Examen

Profesor: Aris Daniilidis.

Auxiliares: Daniel Contreras, Juan Pablo Donoso, Diego Gramusset, Donato Vásquez.

P1. (a) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se definen las funciones $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$G(t) = f(t, t, \dots, t)$$

$$h(x_1, \dots, x_n) = G\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)$$

- i) Calcule $G'(t)$ y $\nabla h(x_1, \dots, x_n)$ en términos de las derivadas parciales de f .
- ii) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial(f-h)}{\partial x_i}(x, \dots, x) = 0$$

(b) Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Se definen las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u(r, \varphi) = \cos(\varphi) \cdot f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \sin(\varphi) \cdot g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

$$v(r, \varphi) = -\sin(\varphi) \cdot f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \cos(\varphi) \cdot g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

Probar que

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) - \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

P2. (a) Calcular el volumen del sólido limitado por el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide de ecuación $z = 6 - x^2 - y^2$.

Indicación: Encuentre la intersección de ambas superficies para determinar la región de integración.

(b) Sea S la región en el primer cuadrante encerrada por las curvas

$$y = e^x, \quad y = 2e^x, \quad y = 2 - x, \quad y = 2 - 4x.$$

Considere el cambio de variables definido por $u = ye^{-x}$ y $v = \frac{2-y}{x}$. Calcule la integral

$$I = \iint_S \frac{yx + 2 - y}{xy(2 - y)} dx dy$$

utilizando el cambio de variables.

(c) Calcule la integral

$$\int_2^4 \int_{\frac{4}{x}}^{\frac{20-4x}{8-x}} 4y - y^2 dy dx$$

Hint: Use Fubini de manera adecuada.

P3. (a) Encuentre todos los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^2 - \sin(x + y)$$

y determine su tipo (máximo local, mínimo local o punto silla).

(b) Considere la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Encuentre los puntos en que f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre la región $\{(x, y) : \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1\}$. Explique por qué estos puntos existen.