Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-2 Cálculo en Varias Variables
16 de Junio de 2014

Ejercicio 3

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Daniel Contreras, Juan Pablo Donoso, Diego Gramusset, Donato Vásquez.

P1. Considere la curva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$ formada por la intersección del cono de ecuación $z^2 = 2x^2 + 2y^2$ y el plano de ecuación $z = 1 - x - y$. Calcule, usando el método de los multiplicadores de Lagrange, la distancia de la curva al origen. Luego justifique porqué este deber ser la solución del problema.

Para facilitar el cálculo de derivadas parciales, calcule la distancia al cuadrado del origen a la curva $\mathcal{C}$.

Solución: :

El planteamiento del problema es:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ g_1(x,y,z) = 0 & \\ g_2(x,y,z) = 0 & \end{array}$$

Donde $g_1(x,y,z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2$ y $g_2(x,y,z) = z - 1 + x + y$. Notemos que la curva sobre la que trabajamos es no acotada, entonces no es compacta (recuerden que los compactos en dimensión finita son los cerrados y acotados), por lo que no podemos justificar la existencia de mínimo sobre $\mathcal{C}$ por continuidad y compacidad. Sin embargo, tenemos que la función es coerciva. Veremos que esto implica que la función continua f alcanza su mínimo sobre la curva $\mathcal{C}$. En efecto (en adelante x es una tupla (x,y,z)), consideremos $x_0 \in \mathcal{C}$, como la función es coerciva tenemos que existe una bola cerrada $B \doteq B(0,r)$ con $r > 0$ tal que:

$$\forall x \in B^c,\ f(x) \geq f(x_0)$$

Ahora tenemos dos casos. Si pasa que $\mathcal{C} \cap B = \emptyset$ entonces $\mathcal{C} \subset B^c$, lo cual implica que

$$\forall x \in \mathcal{C}\ f(x) \geq f(x_0)$$

Como $x_0 \in \mathcal{C}$, entonces el mínimo se alcanza en x_0.

El segundo caso corresponde a $\mathcal{C} \cap B \neq \emptyset$. Este conjunto resulta ser compacto, pues la curva $\mathcal{C}$ y B son conjuntos cerrados, luego $\mathcal{C} \cap B$ es cerrado. Como además B es acotado (por ser una bola de radio r), entonces $\mathcal{C} \cap B$ es cerrado y acotado, luego es compacto. Como la función f es continua, tenemos que en particular alcanza mínimo en $\mathcal{C} \cap B$, digamosle $\bar{x}$ al punto de $\mathcal{C} \cap B$ donde se alcanza el mínimo. Vemos que este es el mínimo que buscabamos, pues:

$$\forall x \in \mathcal{C} \cap B \quad f(\bar{x}) \leq f(x)$$

Como además $x_0 \in \mathcal{C}$, entonces $f(\bar{x}) \leq f(x_0)$. esto útlimo implica que:

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{C} \cap B^c$$

Y juntando las dos últimas proposiciones implican que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{C}$$

Luego hemos demostrado que la función, al ser coerciva, alcanza el mínimo en $\mathcal{C}$. Veremos entonces que resolviendo el sistema del Lagrangiano, encontraremos un solo candidato a mínimo. Como sabemos que existe, podemos concluir que el es el que buscamos.

Definimos entonces el Lagrangiano del problema:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z)$$

y buscamos el candidato a mínimo imponiendo la ecuación:

$$\nabla_{\vec{x}}\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \vec{0}$$

Lo que es equivalente a:

$$\begin{aligned}
2x &= -4\lambda_1 x + \lambda_2 && (1)\\
2y &= -4\lambda_1 y + \lambda_2 && (2)\\
2z &= 2\lambda_1 z + \lambda_2 && (3)\\
z^2 &= 2x^2 + 2y^2 && (4)\\
1 &= x + y + z && (5)
\end{aligned}$$

Restando la segunda de la primera, vemos que:

$$(1 + 2\lambda_1)(x - y) = 0$$

Veamos el caso $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, entonce reemplanzando λ_1 en (1) tenemos que:

$$\lambda_2 = 0$$

Reemplazando los valores de λ_1 y λ_2 en (3) tenemos que:

$$z = 0$$

Reemplazando esto en (4) vemos que $x = y = 0$. Como $x = y = z = 0$, reemplazando en (5) llegamos a $1 = 0$, lo cual es una contradicción. Entonces debe cumplirse que $x = y$. En honor al tiempo, se deja propuesto la resolución de lo restante (como guía, dejen todas las ecuaciones del comienzo en términos de x y z. Recuerden además que buscan el punto donde se alcanza el mínimo, por lo que para resolver los sistemas restantes eliminen los λ's).

El candidato encontrado por Lagrange es:

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Notemos además que:

$$\nabla g_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \nabla g_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

son l.i., por lo cual es válido usar Lagrange para concluir que este punto es el mínimo que buscabamos (pues ya sabemos que existe). La distancia mínima corresponde entonces a

$$\left\|\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right\|_2 = \sqrt{f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Notas:

- Si bien al final el argumento de coercividad era correcto, por lo menos en mi sala les dije después que lo ignorasen, porque vi que la demostración no era trivial. Por este inconveniente, considerare a todos (obviamente también la otra sala) buena esta parte.

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, y definamos $g(u,v) = f(u+v, uv^2)$. Supongamos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 1.$$

Se le pide calcular:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(1,1),\ \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(1,1)$$

Solución:

Aplicamos regla de la cadena directamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv^2)\frac{\partial (u+v)}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv^2)\frac{\partial uv^2}{\partial u}\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv^2)v^2
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+v,uv^2)\frac{\partial (u+v)}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u+v,uv^2)\frac{\partial uv^2}{\partial u} + v^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u+v,uv^2)\frac{\partial u+v}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+v,uv^2)\frac{\partial uv^2}{\partial u}\right)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+v,uv^2) + 2v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u+v,uv^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+v,uv^2)v^2
\end{aligned}$$

Reemplazando en $u=v=1$ vemos que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 4$$

Calculamos ahora la otra derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv^2)\frac{\partial (u+v)}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv^2)\frac{\partial uv^2}{\partial v}\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv^2) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv^2)uv
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+v,uv^2)\frac{\partial (u+v)}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u+v,uv^2)\frac{\partial uv^2}{\partial v}\\
&+ 2u\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv^2) + v\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u+v,uv^2)\frac{\partial (u+v)}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+v,uv^2)\frac{\partial uv^2}{\partial v}\right]\right)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+v,uv^2) + 4uv\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u+v,uv^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv^2) + 4u^2v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+v,uv^2)
\end{aligned}$$

reemplazando $u=v=1$ vemos que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(1,1) = 13$$

P3. Sea X un e.v.n. y considere $f_n : X \to \mathbb{R}$ una familia de funciones convexas para todo $n \in \mathbb{N}$, y tales que $\exists M > 0$ tal que para todo $x \in X$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leq M$. Definimos

$$f(x) \doteq \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

Demuestre que f es convexa. Para esto:

(a) Demuestre que:

$$epi(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} epi(f_k)$$

(b) Demuestre que

$$n_1 \leq n_2 \Longrightarrow \bigcap_{k \geq n_1} epi(f_k) \subset \bigcap_{k \geq n_2} epi(f_k)$$

y con esto último, junto con la parte (a), demuestre que $epi(f)$ es convexo. Concluya.

Solución:

(a) Lo hacemos por equivalencias

$$\begin{aligned}
(x,r) \in epi(f) &\Longleftrightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x) \leq r \\
&\Longleftrightarrow \exists\; n_0 \in \mathbb{N} \;\; \sup_{k \geq n_0} f_k(x) \leq r \quad (\star) \\
&\Longleftrightarrow \exists\; n_0 \in \mathbb{N},\;\; f_k(x) \leq r \;\forall k \geq n_0 \\
&\Longleftrightarrow \exists\; n_0 \in \mathbb{N},\;\; (x,r) \in \bigcap_{k\geq n_0} epi(f_k) \\
&\Longleftrightarrow (x,r) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} epi(f_k)
\end{aligned}$$

A continuación procedemos a explicar la equivalencia estrella. Supongamos, por contradicción, que (suponiendo que $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} f_k(x) \leq r$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{k\geq n} f_k(x) > r$$

Entonces:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x) \geq r$$

luego (por lo que estamos suponiendo)

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x) = r$$

Lo que implica que para todo n

$$\sup_{k\geq n} \leq r$$

Lo que se contracice con que para todo n, $\sup_{k\geq n} f_k(x) > r$. Entonces se tiene la implicancia. La otra es directa.

(b) Sean $n_1 \leq n_2$ y sea $(x,r) \in \bigcap_{k\geq n_1} epi(f_k)$. Como

$$\forall k \geq n_1,\;\; f_k(x) \leq r$$

Entonces, como $n_1 \leq n_2$ es directo que

$$\forall k \geq n_2,\;\; f_k(x) \leq r$$

entonces $(x,r) \in \bigcap_{k\geq n_2} epi(f_k)$. Como las f_k son convexas, entonces sus epigrafos son convexos. Como intersección cualquier de convexos es convexo, entonces $\bigcap_{k\geq n} epi(f_k)$ es convexo para todo n. Como union creciente de convexos es convexo, concluimos que $epi(f)$ es convexo y entonces f es convexa.