Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
30 de Julio de 2013

Examen

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Juan Pablo Donoso, Gianfranco Liberona, Valentina Toro.

P1. [Ponderación: 25%] Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) **[3.0 ptos.]** Muestre que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
Hint: *Para la continuidad en el origen, use adecuadamente las siguientes desigualdades de números reales*

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |\operatorname{sen}(u)| \leq |u| \quad , \quad \forall x,y \in \mathbb{R},\ |xy| \leq x^2 + y^2$$

(b) **[1.5 ptos.]** Para $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|d\| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 1$, determine si existe la derivada direccional $Df((0,0);(d_1,d_2))$. Usando este resultado, calcule en caso de ser posible las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ .$$

(c) **[1.5 ptos.]** Estudie la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

P2. [Ponderación: 25%] Considere la función $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

(a) **[1.0 ptos.]** Considere el conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ : \ \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1\}.$$

Muestre que este conjunto es compacto.

(b) **[3.0 ptos.]** Deduzca de lo anterior que f alcanza su valor máximo y mínimo en C, y encuentre estos valores.
Hint: *Recordando que para $u \in \mathbb{R}^d$,*

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{d} u_i^2,$$

escriba el lagrangeano asociado a este problema como una función de $2d+1$ variables.

(c) **[2.0 ptos.]** Usando lo anterior, demuestre la *desigualdad de Cauchy-Schwartz*

$$\langle x,y \rangle \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^d.$$

Hint: *Primero demuestre la desigualdad para $x, y \in C$ usando para ello lo encontrado en* **(b)***, y luego haga los ajustes necesarios para extender su resultado para $x, y \in \mathbb{R}^d$.*

P3. [Ponderación: 50%]

(a) Calcule el valor de la siguiente integral impropia

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx.$$

Hint: *Para llevar a cabo lo pedido, muestre y utilice adecuadamente la igualdad*

$$\int_0^\infty e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x}$$

para transformar I en una integral doble; y haciendo uso del teorema de Fubini calcule esta integral en un orden que le parezca conveniente para obtener el resultado buscado.

(b) Considere la región C, definida como la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ y el cono $z^2 \geq x^2 + y^2$.

i) Bosqueje la región C y usando un cambio de variables conveniente, re-parametrice esta región.

ii) Calcule la integral

$$\iiint_C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$$

Tiempo: 3.0 horas.
¡Muy buena suerte!