Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-2 Cálculo en Varias Variables
18 de Junio de 2014

Control #3

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Daniel Contreras, Juan Pablo Donoso, Diego Gramusset, Donato Vásquez.

P1. **(a)** Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \operatorname{sen}^2(x + y) + x^2 y$$

Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 para f en torno al punto $(0, 0)$.

Solución:
Notemos que la función es de clase $\mathcal{C}^2$ por álgebra y composición de funciones de clase $\mathcal{C}^2$, luego sus derivadas cruzadas son iguales. Además veamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2\operatorname{sen}(x+y)\cos(x+y) + 2xy = \operatorname{sen}(2(x+y)) + 2xy & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2\operatorname{sen}(x+y)\cos(x+y) + x^2 = \operatorname{sen}(2(x+y)) + x^2 & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\cos(2(x+y)) + 2y & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2\cos(2(x+y)) + 2x & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= 2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2\cos(2(x+y)) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= 2
\end{aligned}$$

Luego, como $f(0,0) = 0$, $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ tenemos que

$$P_2(h_1, h_2) = \frac{1}{2}(h_1, h_2)\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2.$$

(b) Muestre que f es de clase C^3, y pruebe que:

$$|f(h_1, h_2) - P_2(h_2, h_2)| \leq 2\sqrt{2}\|(h_1, h_2)\|^3$$

donde P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de f en torno a $(0, 0)$.
Solución: Notemos que f es de clase $\mathcal{C}^3$ por álgebra y composición de funciones de clase $\mathcal{C}^3$, luego las terceras derivadas cruzadas son iguales. Veamos entonces que para encontrar una estimación de $f(h_1, h_2) - P_2(h_1, h_2)$ podemos usar la fórmula de Taylor

$$\begin{aligned}
f(h_1, h_2) - P_2(h_1, h_2) = R_3(h_1, h_2) &= \frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j}\partial y^j}(\xi h_1, \xi h_2)h_1^{3-j}h_2^j\\
&= \frac{1}{3!}(f_{xxx}h_1^3 + 3f_{xxy}h_1^2h_2 + 3f_{xyy}h_1h_2^2 + f_{yyy}h_2^3)
\end{aligned}$$

donde las derivadas están evaluadas en $(\xi h_1, \xi h_2)$ para algún $\xi \in [0, 1]$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x,y) &= -4\operatorname{sen}(2(x+y))\\
f_{xxy}(x,y) &= -4\operatorname{sen}(2(x+y)) + 2\\
f_{xyy}(x,y) &= -4\operatorname{sen}(2(x+y))\\
f_{yyy}(x,y) &= -4\operatorname{sen}(2(x+y))
\end{aligned}$$

Para notando que $|\operatorname{sen}(2(x+y))| \leq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|f_{xxx}(\xi h_1, \xi h_2)| &\leq 4\\
|f_{xxy}(\xi h_1, \xi h_2)| &\leq 6\\
|f_{xyy}(\xi h_1, \xi h_2)| &\leq 4\\
|f_{yyy}(\xi h_1, \xi h_2)| &\leq 4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
|f(h_1,h_2) - P_2(h_1,h_2)| = |R_3(h_1,h_2)| &\leq \frac{1}{3!}(4|h_1|^3 + 3\cdot 6h_1^2|h_2| + 3\cdot 4|h_1|h_2^2 + 4|h_2|^3)\\
&\leq \frac{1}{6}(6|h_1|^3 + 18h_1^2|h_2| + 18|h_1|h_2^2 + 6|h_2|^3)\\
&= (|h_1| + |h_2|)^3
\end{aligned}$$

Luego, queremos ver que $(|h_1|+|h_2|)^3 \leq 2\sqrt{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}^3 \iff (|h_1|+|h_2|)^2 \leq 2(h_1^2+h_2^2)$ que se puede comprobar fácilmente de

$$(|h_1| - |h_2|)^2 \geq 0 \iff h_1^2 + h_2^2 - 2|h_1h_2| \geq 0 \iff 2(h_1^2+h_2^2) \geq h_1^2 + h_2^2 + 2|h_1h_2| = (|h_1| + |h_2|)^2$$

o también, usando la convexidad de la función x^2, de donde

$$\left(\frac{|h_1| + |h_2|}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}h_1^2 + \frac{1}{2}h_2^2 \iff (|h_1| + |h_2|)^2 \leq 2(h_1^2+h_2^2)$$

.

Finalmente $|f(h_1,h_2) - P_2(h_1,h_2)| \leq (|h_1| + |h_2|)^3 \leq 2\sqrt{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}^3 = 2\sqrt{2}\|(h_1,h_2)\|^3$.

P2. **(a)** Considere la función

$$f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$$

Demuestre que la función es estrictamente convexa.

Solución:

Demostraremos que el hessiano de $\ln(e^x+e^y)$ es semi definido positivo. Como la función es $\mathcal{C}^2$, es equivalente a que la función sea convexa. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{e^x}{e^x+e^y}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{e^y}{e^x+e^y}
\end{aligned}$$

Sigue que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{-e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}
\end{aligned}$$

(Notar que la segunda igualdad es válida pues f es $\mathcal{C}^2$). Entonces tenemos que el hessiano de f esta dado por:

$$H_f(x,y) = \frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2} > 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, para ver que H_f es semi definido positivo, basta ver que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es semi definida positiva. Entonces, esto lo podemos hacer de dos formas por lo menos

- Caculando los valores propios de A, los cuales resultan ser $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$.
- Tomar $\vec{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ y demostrar que $\vec{d}^t A\vec{d} \geq 0$.

Cualquiera de las dos formas es correcta.

(b) Demuestre que para $\alpha \in \mathbb{R}$ el siguiente conjunto:

$$S_\alpha \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R} : 3\ln(e^x + e^y) + x^2 \leq \alpha\}$$

es un conjunto convexo.

Solución:
Como, por la parte anterior, sabemos que $\ln(e^x + e^y)$ es convexa, entonces $3\ln(e^x + e^y)$ resulta ser convexa por ser una ponderación no negativa de una función convexa (varios pusieron que toda ponderacón de una convexa es convexa, lo cual es falso). Como x^2 es claramente convexa, entonces del hecho que suma de funciones convexas es convexa, $g(x, y) = 3\ln(e^x + e^y) + x^2$ es convexa. Como S_α corresponde al conjunto de nivel α de la función convexa g, entonces S_α es un conjunto convexo.

(c) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa, y supongamos que es acotada superiormente. Nos proponemos demostrar que f es constante. Para esto realice lo siguiente

i) Suponga que f no es constante, i.e. existen x, y con $f(x) < f(y)$. Defina la función:

$$g(t) = f(x + t(y - x)).$$

Demuestre que es convexa, y que $g(0) < g(1)$.

Solución:
Aquí también hay por lo menos dos formas de demostrar que g es convexa.

- Notando que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por:

  $$h(t) = x + t(y - x)$$

  es lineal afín, entonces $g = f \circ h$ es convexa porque es composición de convexa con lineal afín (ojo que el orden de la composición es importante!, en general si h es lineal afín y f es convexa, no es cierto que $h \circ f$ resulta ser convexa).

- Lo otro era hacerlo por definición, esto es, demostrar que para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in [0, 1]$,

  $$g(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha g(t_1) + (1 - \alpha)g(t_2).$$

Demostrar que $g(0) < g(1)$ es directo del enunciado y que $g(0) = f(x)$, $g(1) = f(y)$.

ii) Considere ahora $t > 1$, demuestre que

$$g(1) \leq \left(1 - \frac{1}{t}\right) g(0) + \frac{1}{t} g(t)$$

De lo anterior deduzca que, para todo $t > 1$

$$g(t) \geq g(0) + t(g(1) - g(0)).$$

Solución: Usando la convexidad de g, como $\frac{1}{t} \in (0, 1]$

$$g(1) = g\left(\left(1 - \frac{1}{t}\right) 0 + \frac{1}{t} t\right) \leq \left(1 - \frac{1}{t}\right) g(0) + \frac{1}{t} g(t)$$

La desigualdad que piden deducir es directa de multiplicar la última desigualdad por t y reordenar.

iii) Concluya el resultado, demostrando que la última desigualdad implica que f es no acotada superiormente, teniendose entonces la contradicción.

Solución: Como, para todo $t > 1$

$$g(t) \geq g(0) + t(g(1) - g(0))$$

entonces, como $g(1) > g(0)$

$$g(t) \to \infty \text{ cuando } t \to \infty$$

Pero esto último dice que

$$f(x + t(y - x)) \to \infty \text{ cuando } t \to \infty$$

Lo cual contradice que f sea acotada superiormente.

P3. (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2 + \cos(x) + y^2 - y$

i) Encuentre y estudie la naturaleza de los puntos críticos de f.

ii) Demuestre que f alcanza su mínimo.

(b) Resuelva el problema de optimización

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{mín} & g(x, y) = 6 - x^2 + y^2 \\ \text{s. a} & (x, y) \in \overline{B}(0, 8) \end{cases}.$$

Solución:

(a) **i)** Dado que no tenemos reestricciones en la función, entonces para encontrar los puntos críticos, tenemos que

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - \sin(x) \\ 2y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} 2x - \sin(x) = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Por lo tanto el único punto crítico de la función es $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Para ver la naturaleza de este punto crítico, veamos el hessiano de f en este punto.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \cos(x) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Por lo tanto el Hessiano es

$$Hf\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Veremos que $Hf\left(0, \frac{1}{2}\right)$ es definido positivo, para ello notemos que

$$\left| Hf\left(0, \frac{1}{2}\right) - \lambda I \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \implies \lambda = 1 \vee \lambda = 2$$

Como los valores propios del hessiano son mayores que 0, tenemos que $Hf(0, \frac{1}{2})$ es definido positivo y por lo tanto $(0, \frac{1}{2})$ es mínimo local de f.

ii) Demostraremos que la función f es convexa, para ello, veremos que el hessiano de f en cualquier punto es definido positivo, de la parte **i)**, tenemos que

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - \cos(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ver que $Hf(x, y)$ es definido positivo, analizaremos los valores propios de la matriz, para ello

$$|Hf(x, y) - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2 - \cos(x) - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (2 - \cos(x) - \lambda)(1 - \lambda) = 0 \implies \lambda = 2 - \cos(x) \vee \lambda = 1$$

Sabemos que $-1 \leq \cos(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto $0 < 1 \leq 2 - \cos(x) \leq 3$, por lo tanto $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ los valores propios del Hessiano $Hf(x, y)$ son positivos, por lo tanto la matriz $Hf(x, y)$ es definida positiva, se demuestra entonces que la función f es convexa.
Como $(0, \frac{1}{2})$ es un mínimo local de f y f es convexa, se concluye que $(0, \frac{1}{2})$ es mínimo global de f.

(b) Primero veamos que como la bola $\overline{B}(0,8)$ es cerrada y acotada en $\mathbb{R}^2$, que al ser un e.v.n de dimensión finita, tenemos que $\overline{B}(0,8)$ es compacta y por lo tanto la función g alcanza su máximo y su mínimo en $\overline{B}(0,8)$. Para esta pregunta, optimizaremos de dos formas, primero en el interior de la bola y despúes optimizaremos en la la frontera.

- Caso 1: Optimizamos en el interior de la bola $\overline{B}(0,8)$.
  En este caso solo tenemos que evaluar el gradiente de g, vemos que

$$\nabla g = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

  Por lo que tenemos tenemos solo un punto crítico, que es el punto $(0,0)$ y que efectivamente se encuentra en el conjunto factible, veamos ahora la naturaleza de este punto crítico, para ello analizemos el hessiano g evaluado en el punto $(0,0)$. No es difícil ver que el Hessiano es

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  De donde obtenemos que os valores propios de $Hf(0,0)$ son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, por lo tanto concluimos que el punto $(0,0)$ es un punto silla, y además tenemos que $g(0,0) = 6$

- Caso 2: Optimización en la frontera. En este caso, debemos resolver el siguiente problema de optimización

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} \text{mín} & g(x,y) = 6 - x^2 + y^2 \\ \text{s. a} & \sqrt{x^2+y^2} = 8 \end{cases} = \begin{cases} \text{mín} & g(x,y) = 6 - x^2 + y^2 \\ \text{s. a} & x^2+y^2 = 64 \end{cases}$$

  El Lagrangeano del problema es $\mathcal{L}(x,y) = 6 - x^2 + y^2 - \lambda(x^2+y^2-64)$. Para calcular los puntos críticos de g, calculamos el gradiente (según (x,y)) de $\mathcal{L}$, vemos entonces que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x - 2x\lambda = 0 \implies 2x(1+\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - 2y\lambda = 0 \implies 2y(1-\lambda) = 0$$

  Analizaremos por casos la situación anterior

  - Caso 2.1 $\lambda = 1$
    Tenemos entonces que $x = 0$ y por lo tanto $y = \pm 8$, luego los puntos críticos en este caso son $(0,-8)$ y $(0,8)$.
  - Caso 2.2 $\lambda = -1$
    Tenemos entonces que $y = 0$ y por lo tanto $x = \pm 8$, luego los puntos críticos en este caso son $(-8,0)$ y $(8,0)$.

  Además como tenemos solo una restricción, basta saber que el gradiente en los puntos factibles sea distinto de 0, que por el caso 1 sabemos que es cierto.
  Finalmente, tenemos que $g(0,\pm 8) = 6 + 64 = 70$ y $g(\pm 8, 0) = 6 - 64 = -58$, de donde se concluye que los mínimos del problema son los puntos $(\pm 8, 0)$.