MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 7

29 de Abril de 2014

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de Schwarz). *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en A. Si las segundas derivadas parciales son continuas en $x_0 \in A$, entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0),\ \forall i,j = 1,\cdots,n.$$

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $x_0 \in A$. Se define la **matriz Hessiana** de f en x_0 como

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Teorema 2 (Teorema de Taylor de 2^{do} orden). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^3$. Entonces:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}h^T Hf(x_0)h + R_2(x_0, h),$$

donde el resto $R_2(x_0, h)$ tiene una expresión integral y $|R_2(x_0, h)| \leq M||h||^3$. Así, en particular,

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_2(x_0, h)}{||h||^2} = 0.$$

Teorema 3 (Caracterizaciones). *Una matriz A es definida positiva (resp. negativa) si y solo si los valores propios de A son positivos (resp. negativos).*

Análogamente, una matriz A es semidefinida positiva (resp. negativa) si y solo si los valores propios de A son positivos (resp. negativas) o nulos.

Una matriz A es definida positiva si y solo si sus submatrices cuadradas a lo largo de la diagonal tienen determinantes positivos.

Para el caso de las matrices definidas negativas, los signos de los determinantes deben alternarse, comenzando con negativo.

Definición 2. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Un punto $x_0 \in A$ se dice crítico de f si $\nabla f(x_0) = 0$.

Teorema 4 (Condición de 2^{do} orden). *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y f de clase $\mathcal{C}^2$. Si x_0 es un mínimo local de f entonces la matriz $H_f(x_0)$ es semidefinida positiva. Si x_0 es un máximo local de f, entonces $Hf(x_0)$ es semidefinida negativa.*

2. Problemas

P1. (a) Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sin^2(x + y) + x^2 y.$$

(I) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 para f entorno al punto $(0, 0)$.

(II) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^3$ y pruebe que

$$|f(h_1,h_2) - P_2(h_1,h_2)| \leq \frac{40}{3}||(h_1,h_2)||^3,$$

donde P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de f entorno de $(0,0)$.

(b) Sea $g(x,y) = xye^{x^2+2y^2}$. Explicite un polinomio de dos variables $T(x,y)$ que cumpla:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - T(x,y)}{x^4+y^4} = 0.$$

(c) (I) Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ tal que la matriz $H_h(x) = h''(x)$ es semidefinida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que si x_0 es un punto crítico de h, entonces x_0 es un punto de mínimo global para h.

(II) Utilice la parte (i) para mostrar que para todo par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 2xy - x - y + \frac{3}{4} \geq 0$$

P2. *a*) Resuelva:

$$\min_{x,y>0} \frac{1}{x^2y} + \ln(x) + y^2.$$

Verifique que encontró un mínimo global.

b) Verifique que el punto $(1,1,1)$ es crítico para la siguiente función:

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz,$$

y determine su naturaleza calculando los valores propios de la Matriz Hessiana.