MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Sebastián Urzúa B.

Problemas Propuestos

09 de Mayo de 2014

P1. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde $g(1,1,1) = (2,3)$. Se tiene que

$$Df(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f \circ g(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy^2z^2 \\ x^2y^2z \end{bmatrix}.$$

En base a esto calcule

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(1,1,1).$$

P2. Sean $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = e^{xy}$. Determine los puntos (x,y) donde la derivada direccional de f en la dirección de máximo crecimiento de g es igual a la derivada direccional de g en la dirección de máximo crecimiento de f.

P3. Sea $f(u,v,w)$ una función con derivadas parciales continuas de orden 1 y 2, y sea

$$g(x,y) = f(x+y, x-y, xy).$$

Calcule

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

en términos de las derivadas de f

P4. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan(y/x) - y^2 \arctan(x/y) & \text{si } xy \neq 0; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) ¿Se cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)?$$

P5. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, para todo $i = 1,2,3$, y las coordenadas u, v, w son funciones de (x,y,z). Definimos la **divergencia de F** como:

$$div(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Considere además la transformación que define a las coordenadas cilíndricas, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$G(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho, \sin\theta, z),$$

y los vectores unitarios de este sistema de coordenadas,

$$\hat{\rho} = \frac{\frac{\partial G}{\partial \rho}}{||\frac{\partial G}{\partial \rho}||}, \ \hat{\theta} = \frac{\frac{\partial G}{\partial \theta}}{||\frac{\partial G}{\partial \theta}||}, \ \hat{z} = \frac{\frac{\partial G}{\partial z}}{||\frac{\partial G}{\partial z}||},$$

donde $\frac{\partial G}{\partial \rho}, \frac{\partial G}{\partial \theta}, \frac{\partial G}{\partial z}$ son vectores que se obtienen de derivar parcialmente cada componente de G con respecto a la variable que corresponda.

Considere, por último, la función $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$H(\rho,\theta,z) = h_1(\rho,\theta,z)\hat{\rho} + h_2(\rho,\theta,z)\hat{\theta} + h_3(\rho,\theta,z)\hat{z}.$$

a) Encuentre explícitamente los vectores unitarios $\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}$.

b) Deduzca que H se puede escribir como:

$$H(\rho, \theta, z) = A_1(\rho, \theta, z)\hat{\imath} + A_2(\rho, \theta, z)\hat{\jmath} + A_3(\rho, \theta, z)\hat{k},$$

donde $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ son los vectores unitarios canónicos. Explicite los valores de A_1, A_2 y A_3.

c) Demuetsre que bajo este cambio de variables,

$$div(H) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rh_1)}{\partial r} + \frac{\partial h_2}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial h_3}{\partial z}.$$

P6. Estudie y clasifique los punto críticos de la función:

$$f(x, y, z) = y\ln(z) + \frac{y^2}{2z} + x^2 + 2.$$

P7. Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$$

y determine si son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

Muestre que

$$\lim_{\|(x,y)\|\to 0} f(x, y) = 0$$

y deduzca que

$$\max\{f(x, y) \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{y} \quad \min\{f(x, y) \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

existen. Calcule sus valores.

P8. Sea $f(x, y) = e^x + \sin(x + y) + y^3$.

(I) Encuentre el polinomio de Taylor $P_2(x, y)$ de orden 2 de f entorno al punto $(1, 0)$.

(II) Encuentre una constante C tal que para $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ se tenga

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| \leq C||(x - 1, y)||^3$$

P9. Sea $f(x, y) = xye^{x^2+2y^2}$. Encuentre explícitamente un polinomio (x, y) tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{x^4 + y^4} = 0.$$

P10. Sea F una función $\mathcal{C}^1$ del intervalo $(-1, 1)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $F(0) = 0$ y $F'(0) \neq 0$. Pruebe que existe $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que $||F(t)||$ es una función creciente de t en $(0, \varepsilon)$.

P11. Sean $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2 y tales que $\nabla f(x_0) = 0$ y $D^f(x_0)$ es invertible. Demuestre que para a suficientemente pequeño la función $F(x) = f(x) + ag(x)$ tiene un punto crítico.

Ind. Considere Considere la función $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$H(a, x) = \nabla f(x) + a\nabla g(x).$$

P12. Considere la transformación en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\eta(x,y) = \frac{x+y}{2}$$

$$\xi(x,y) = \frac{x+y}{2}.$$

Dada una función $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ definamos $u(x,y) = v(\eta(x,y), \xi(x,y))$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}.$$

(b) Usando la parte anterior, muestre que si $u(x,y) = p(\eta(x,y)) + q(\xi(x,y))$ para ciertas funciones p, q entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(c) Encuentre una función u que satisface la ecuación de arriba y que además satisface

$$u(x,0) = senx, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0.$$