MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 4

08 de Abril de 2014

1. Resumen

Teorema 1 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, f diferenciable en $x_0 \in A$, g diferenciable en $f(x_0) \in B$. Luego, $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en x_0 y*

$$D(f \circ g)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0).$$

2. Problemas

P1. *a*) Sean $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que

$$f(x,y,z) = (u,(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$

b) Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y consideremos el cambio de variables a coordenadas esféricas:

$$x = r\cos(\theta)\sin(\phi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = r\cos(\phi)$$

Definamos $F(r,\phi,\theta) = g(r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta))$. Queremos calcular las derivadas parciales de F con respecto a r, θ, ϕ.

P2. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función diferenciable tal que $\nabla g(0,0) = (1,3)$. Considere la función $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x,y,z) = g(f(x) + f(y)^2, f(x) + f(y)^2 + f(z)^3).$$

Encuentre el vector $\nabla h(0,0,0)$.

b) Para una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ considere la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{4x}\sin^2(y).$$

El objetivo de este problema es encontrar una solución $f(x,y)$ de la ecuación planteada, definida en todo $\mathbb{R}^2$. Para ello proponga una solución del tipo:

$$f(x,y) = g(e^x\cos(y), e^x\sin(y)),$$

encuentre una ecuación para g y resuélvala.

P3. (a) Considere la función:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^2x+1 \\ \sin(3x+y-2) \end{pmatrix}$$

Muestre que f es diferenciable en $(0,2)$ y encuentre la mejor aproximación lineal afín $T(x,y)$ de f cerca de este punto.

(b) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$, una función diferenciable en el punto $(0,2)$ tal que

$$f(0,2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f'(0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere la función $g(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)f_3(x,y)$. Demuestre que g es diferenciable en $(0,2)$. Encuentre el vector $\nabla g(0,2)$