Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
29 de Marzo del 2014

Tarea 1

Profesores: Natacha Astromujoff, Félipe Célèry
Auxiliares: Tamara Quiroga, Nicolás Zalduendo

I). **(a)** Suponga que $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ conmutan, es decir $AB = BA$. Demuestre que :

i) $A^nB = BA^n \; \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $A^tB^t = B^tA^t$

iii) Si A y B invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(b) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ verifica $A^2 + A + I = 0$, entonces es invertible

(c) Sea C una matriz de $n \times n$, que verifica $C^t = -C$ Demuestre que $c_{ii} = 0$

(d) Sean Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ demuestre que AB es invertible $\Leftrightarrow$ A y B son invertibles.

(e) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ demuestre que $AX = XA \; \forall X \in M_{n\times n} \Leftrightarrow A = \alpha I_n$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

II). Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de la forma:

$$\text{A}= \begin{bmatrix} B & O_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{bmatrix}$$

con $B \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{qq}(\mathbb{R})$, $n = p + q$ y $0_{p,q}$, $0_{q,p}$ son matrices nulas de dimensión $p \times q$ y $q \times p$ respectivamente.

Demuestre:

$$\text{A}^2 = \begin{bmatrix} B^2 & O_{p,q} \\ 0_{q,p} & C^2 \end{bmatrix}$$

III). Considere las matrices

$$\text{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{D}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i) Demuestre que P es invertible y calcule P^{-1}

ii) Demuestre que $A = PDP^{-1}$ y calcule A^{10}

IV). Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & & & 2x_3 & + & \alpha x_4 & = & -1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & + & (\alpha-\beta)x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & (2\alpha-1)x_3 & + & (-\beta-1)x_4 & = & 3-\beta \\ & & x_2 & - & x_3 & + & (\beta-1)x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & (\alpha/2)x_4 & = & 2\beta-3/2 \end{array}$$

(a) Escriba el sistema de forma matricial

(b) Determine que valores deben tomar α y $\beta \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga:

i) Soluciones infinitas

ii) Solucion única

iii) No tenga solución

Para el caso i) y ii) escriba el conjunto solución.

V). Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que al escalonar, sin permutar las filas, todos sus pivotes no son nulos.

(a) Demuestre que A puede factorizarse como el producto de una matriz L, triangular inferior con unos en la diagonal, y una matriz U, triangular superior, donde los pivotes figuran en la diagonal. (Esta factorizacion se llama *descomposición* LU)

(b) Pruebe que A pueden descomponerse en $A = LDU$ siendo D, diagonal formada por los pivotes del escalonamiento, L triangular inferior y U triangular superior.

(c) Demuestre que si A admite la descomposición LDU, entonces la descomposición es única.

(d) Demuestre además que si A es simétrica, entonces $L = U^t$

(e) Encuentre la descomposición LDU de :

$$\text{B}=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(f) Encuentre la descomposición LU de la matriz:

$$\text{A}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

En base a la descomposición anterior resuelva.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$