

## Auxiliar 13: Números complejos

**P1.** (C6 2008) Encuentre los valores  $n \in \mathbb{N}$  que satisfacen la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

**P2.** Demuestre que las raíces de la ecuación de segundo grado  $z^2 + z + 1 = 0$ , son raíces cúbicas de la unidad, distintas de 1.

**P3.** Sea  $z \in \mathbb{C}$  un número complejo que satisface las propiedades:  $|z| = 1$  y  $|z + 1| = 1$ . Pruebe que  $z$  es raíz cúbica de la unidad.

**P4.** Se define el conjunto  $S_1 = \{z : |z| = 1\}$

- (a) Pruebe que  $(S_1, *)$ , donde  $*$  es la multiplicación de números complejos, es subgrupo de  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, *)$
- (b) Sea  $w$  una raíz cúbica de la unidad. Pruebe que la función  $f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow S_1$  definida en cada  $a$  en  $\mathbb{Z}_3$  como  $f(a) = w^a$  es un homomorfismo de  $(\mathbb{Z}_3, +_3)$  en  $(S_1, *)$ . Recuerde que  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  y que  $+_3$  es la suma módulo 3 en  $\mathbb{Z}_3$ .