pauta: Auxiliar 12, P3 (b,c) y P4

P3] b) pdq: $H=\{a^2 : a\in G\}$ es subgrupo de G $(a^2=a\cdot a)$

Primero veamos que $H\subseteq G$, para ello debemos probar que $a^2\in G$, dado $a\in G$. En efecto dado que $(G,\cdot)$ es grupo este cumple clausura y por lo tanto $a\cdot a\in G$ es decir $a^2\in G$, luego $H\subseteq G$.

Veamos que H es subgrupo de G, para mostrar que es grupo usaremos la definición compacta, o sea

pdq $(\forall x,y\in H)\ x\cdot y^{-1}\in H$

→ Sean x,y en H sabemos que $\exists\, a_x, a_y\in G$ tal que $x=a_x^2$, $y=a_y^2$ (por la definición de H). Demostremos que $x\cdot y^{-1}\in H$:

$$x\cdot y^{-1}=a_x^2\cdot(a_y^2)^{-1}=a_x^2\cdot a_y^{-1}\cdot a_y^{-1}=a_x^2\cdot(a_y^{-1})^2$$
$$=(a_x\cdot a_y^{-1})^2$$

Donde $a_x\cdot a_y^{-1}\in G$ pues G es grupo y $a_x, a_y\in G$. Así $x\cdot y^{-1}=(a_x\cdot a_y^{-1})^2$ y $(a_x\cdot a_y^{-1})^2\in H$, es decir $x\cdot y^{-1}\in H$. Con lo que se tiene que $(H,\cdot)$ grupo, en particular subgrupo de G.

b) Calculemos G y H para $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ $(+=+_8,\ \cdot=\cdot_8)$

$$\mathbb{Z}_8=\{[0]_8,[1]_8,[2]_8,[3]_8,[4]_8,[5]_8,[6]_8,[7]_8\}$$

Se puede observar que el neutro para la multiplicación es $[1]_8$, luego un elemento $a\in\mathbb{Z}_8$ tiene inverso si existe $b\in\mathbb{Z}_8$ tal que $a\cdot b=[1]_8$, para que $a\cdot b=[1]_8$ necesitamos que $a\cdot b\equiv_8 1$ que es lo mismo que

$$a\cdot b-1=8\cdot k \text{ para algún } k\in\mathbb{Z}$$

De esto ultimo se desprende que $a\cdot b$ debe ser impar de modo que al restarle 1 nos puede quedar $8k$ que es par. Dicho esto $[0]_8,[2]_8,[4]_8,[6]_8$ no pueden tener inverso pues para todo $a\in\mathbb{Z}_8$

con que podemos multiplicarlos el resultado será par lo que implica

$[2p]_8 \cdot a - 1$ impar y por lo tanto $[2p]_8 \cdot a - 1 \neq 8k \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

($[2p]_8$ representa a cualquiera de los elementos pares que ya descartamos)

Probemos entonces con los impares:

$[1]_8$ tiene inverso? Sí $[1]_8 \cdot [1]_8 = [1]_8$

$[3]_8$ tiene inverso? : sí, $[3]_8 \cdot [3]_8 = [9]_8 = [1]_8$

$[5]_8$ tiene inverso ? : Sí, $[5]_8 \cdot [5]_8 = [25]_8$ donde

$25 - 1 = 24 = 8 \cdot 3$ luego $[25]_8 = [1]_8$

$[7]_8$ tiene inverso?: sí, $[7]_8 \cdot [7]_8 = [49]_8$ donde

$49 - 1 = 48 = 8 \cdot 6 \Rightarrow [49]_8 = [1]_8$

Así $G = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$

y H? Notemos que $\forall a \in G \ \ a^2 = [1]_8$, luego $H = \{[1]_8\}$

→ Calculemos G y H para $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Delta, \cap)$

diferencia simétrica

Notemos que $\mathbb{N}$ es neutro para $\cap$ y $\emptyset$ es neutro para Δ.

Con esto un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es invertible para $\cap$ si existe un conjunto $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $A \cap B = \mathbb{N}$, donde $B = A^{-1}$ para $\cap$. Notemos que el único conjunto que cumple esto es $\mathbb{N}$, y su inverso es $\mathbb{N}$ pues $\mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

$\Rightarrow G = \{\mathbb{N}\}$, $H = \{\mathbb{N}^2\} = \{\mathbb{N} \cap \mathbb{N}\} = \{\mathbb{N}\}$.

P4) a) f morfismo.

pdq f inyectiva $\Leftrightarrow f^{-1}(\{0\}) = 0$

$\Rightarrow)$ Primero notemos que para cualquier morfismo $f(0)=0$

esto pues $f(a)=f(a*0_A)$

$$= f(a)\Delta f(0_A)$$

$$\Rightarrow f(0_A)=0_B$$

Ahora como suponemos que f es inyectiva la preimagen del cero puede ser solo un elemento $(|f^{-1}(\{0\})|=1)$

Como $f(0_A)=0_B$ y la preimagen de 0_B solo tiene un elemento este debe ser cero.

$\Leftarrow)$ Supongamos que $f^{-1}(\{0_B\})=0_A$, es decir $f(0_A)=0_B$

Probemos que

$$f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$$

$$\rightarrow f(a)=f(b)\Rightarrow f(a)\Delta(f(b))^{-1}=0_B$$

$$(*)\Rightarrow f(a)\Delta f(b^{-1})=0_B$$

$$\Rightarrow f(a*b^{-1})=0_B \ (\ddot{\smile})$$

como $f^{-1}(\{0_B\})=0_A$

$$(\ddot{\smile})\Rightarrow a*b^{-1}=0_A$$

$$\Rightarrow a=b$$

$(*)$: $f(b)^{-1}=f(b^{-1})$, esto es cierto pues $f(b)\Delta f(b^{-1})=f(b*b^{-1})=f(0)=0$

y $f(b^{-1})\Delta f(b)=f(b^{-1}*b)$

$=f(0)=0$

Luego $f(b^{-1})$ es el inverso de $f(b)$, es decir $f(b)^{-1}=f(b^{-1})$.

b) pdq: f morfismo sobre anillos $\wedge$ $(A,+,\cdot)$ cuerpo $\Rightarrow f$ es inyectiva

Por contradicción, supongamos que f no es inyectiva por la parte a