Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-6 - Introducción al álgebra

Profesora: María Leonor Varas
Profesora auxiliar: Ivana Bachmann
Fecha: 4 de junio de 2014

Auxiliar 11: Grupos, anillos y homomorfismos

P1. (P2.ii C3 1996) Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación $(a,b) \oplus (\hat{a},\hat{b}) = (a +_2 \hat{a}, b +_3 \hat{b})$
Construya un isomorfismo

$$f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus) \text{ tal que } f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$$

P2. (P2.a,c C3 1998)

(a) Sea $(G,*)$ un grupo Abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G. Se define el conjunto

$$H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$$

Probar que $H * K$ es un subgrupo de G.

(b) Sea $(G,*)$ un grupo que satisface la propiedad $a * a = e$ (el neutro del grupo) para todo a en G, es decir, el inverso de cada elemento en el grupo es el mismo elemento. Pruebe que G es un grupo Abeliano.

P3. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad, definimos:

$$G = \{a \in A : a \text{ tiene inverso para} \cdot\}$$

(a) Demuestre que $(G, \cdot)$ es grupo abeliano.

(b) Sea $H = \{a^2 : a \in G\}$, pruebe que H es subgrupo de G.

(c) Calcule G y H en los siguientes casos

· $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$
· $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Delta, \cap)$

P4. Sean $(A, +, \cdot)$ y $(B, \oplus, \odot)$ dos anillos con $1_A, 1_B$ neutros para $\cdot$ y $\odot$ respectivamente, decimos que $\Psi : A \to B$ es un morfismo de anillos si es morfismo para ambas operaciones y además $\Psi(1_A) = 1_B$.

(a) Demuestre que si f función es un morfismo, entonces es inyectivo si y sólo si $f(\{0\}) = 0$.

(b) Demuestre que si $(A, +, \cdot)$ es cuerpo y Ψ es morfismo de anillos entonces Ψ es inyectiva.

Propiedades:
Anillo: Una estructura $(A, +, \cdot)$ se dice anillo si

- $\star$ $(A, +)$ es grupo abeliano.
- $\star$ $\cdot$ es asociativa
- $\star$ $\cdot$ distribuye respecto a $+$.

Si $\cdot$ conmuta se dice que es un anillo conmutativo. Si existe el neutro para $\cdot$ se dice que es un anillo con unidad.
Proposición: Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo con unidad y $|A| \geq 2$ entonces $1 \neq 0$.
Proposición: Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo entonces

- $\star$ $(\forall x \in A) 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
- $\star$ $(\forall x, y \in A) - (x \cdot y) = -(x) \cdot y = x \cdot (-y)$
- $\star$ $(\forall x, y \in A)(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Cuerpo: Sea $(K, +, \cdot)$ una estructura algebraica. Le llamaremos **cuerpo** si cumple

- $\star$ $(K, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.
- $\star$ Todo elemento $x \in K \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.

Equivalentemente

- $\star$ $(K, +)$ es grupo abeliano.
- $\star$ $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano.
- $\star$ $\cdot$ distribuye respecto a $+$.

Proposición:Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, se dice que x, y son divisores de cero si $x, y \in A \setminus \{0\}$ tales que $x \cdot y = 0$. **Proposición**: Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad tal que $|A|$ es **finito**. Entonces

$$(A, +, \cdot) \text{ es cuerpo} \iff (A, +, \cdot) \text{ no tiene divisores de } 0$$