Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-6 - Introducción al álgebra

Profesora: María Leonor Varas
Profesora auxiliar: Ivana Bachmann
Fecha: 30 de Mayo de 2014

Auxiliar 11: Grupos y homomorfismos

P1. (P2.ii C3 1999) Considere el conjunto

$$\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

con la operación $\cdot_{13}$ de multiplicación módulo 13. Sean

$$A_1 = \{1, 12\} \; A_2 = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

Señale cual de los conjuntos anteriores es grupo para la operación $\cdot_{13}$. Note que $\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}$ es grupo abeliano para $\cdot_{13}$

P2. (P2.ii C3 1996) Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación $(a, b) \oplus (\hat{a}, \hat{b}) = (a +_2 \hat{a}, b +_3 \hat{b})$

(a) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es grupo

(b) Construya un isomorfismo

$$f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus) \text{ tal que } f([1]_6) = ([1]_2\,, [1]_3)$$

P3. (P2.a,c C3 1998)

(a) Sea $(G, *)$ un grupo Abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G. Se define el conjunto

$$H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$$

Probar que $H * K$ es un subgrupo de G.

(b) Sea $(G, *)$ un grupo que satisface la propiedad $a * a = e$ (el neutro del grupo) para todo a en G, es decir, el inverso de cada elemento en el grupo es el mismo elemento. Pruebe que G es un grupo Abeliano.