Pauta Auxiliar 3

P1.- Veamos que f es biyectiva

Inyectividad:

Para probar inyectividad de una función $\tilde{f}: A \to B$ es necesario probar que:

$$\text{Dado } x_1, x_2 \in A,\ \tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2 \quad (1) \quad \text{o bien}$$

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \tilde{f}(x_1) \neq \tilde{f}(x_2) \quad (2)$$

Veamos ue f es inyectiva, para ello usaremos (1).

Sea $X_1, X_2 \subseteq E$ (que es lo mismo que $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E)$)

pdq: $f(X_1) = f(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2$

$$f(X_1) = f(X_2) \underset{\text{def}}{\Rightarrow} X_1 \Delta A = X_2 \Delta A = (\star)$$

Notemos que en el hint se nos recuerda que $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

$$\text{Luego} \quad (\star) \Longrightarrow X_1 = X_2$$

Y así se ha probado la inyectividad.

Sobreyectividad:

Para probar la sobreyectividad de una función $\tilde{f}: A \to B$ se debe demostrar que $(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ y = \tilde{f}(x)$

Veamos que esto se cumple para f

Sea $Y \in \mathcal{P}(E)$ cualquiera, Queremos encontrar $X \in \mathcal{P}(E)$ tal que $f(X) = Y$, que es lo mismo que encontrar X tal que $A \Delta X = Y$.

En efecto, observando el hint vemos que $A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$, luego, suponiendo que X cumple que $A \Delta X = Y$ tenemos

$$A \Delta X = Y \Rightarrow A \Delta X = Y, \text{ donde efectivamente } A \Delta Y \in \mathcal{P}(E).$$

Así basta tomar $X = A \Delta Y$ para que $f(X) = Y$ $\left(f(x) = f(A \Delta Y) = A \Delta (A \Delta Y) = Y\right)$

Así f es también sobreyectiva $\Rightarrow f$ es biyectiva.

función inversa:

Nos gustaría encontrar f^{-1} que cumple que $f(f^{-1}(Y)) = Y$, o bien que $f^{-1}(f(X)) = X$, con $X \in \mathcal{P}(E)$ en el dominio y $Y \in \mathcal{P}(E)$ en el recorrido.

Nuevamente viendo el hint tenemos que $A \triangle (A \triangle B) = B$, con esto basta tomar $f^{-1}(Y) = A \triangle Y$ con lo cual dado $X \in \mathcal{P}(E)$ se tiene

$$f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A \triangle X) = A \triangle (A \triangle X) = X$$

Con lo que tenemos lo pedido.

P2: Primero notemos que trabajaremos sobre Ψ que toma funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y nos entrega su inversa.

Veamos que Ψ es biyectiva

Sobreyectividad

Sea $g \in E$ queremos encontrar $f \in E$ tal que $\Psi(f) = g$.

En efecto basta tomar $f = g^{-1}$, donde g^{-1} es la inversa de una función biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por lo tanto g^{-1} es una función biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, luego $g^{-1} \in E$ y $\Psi(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$. $\Rightarrow \Psi$ es sobreyectiva.

Inyectividad

Esta vez usaremos (2)

Sea $f, g \in E$ pdq:

$$f \neq g \Rightarrow \Psi(f) \neq \Psi(g)$$

$$f \neq g \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R})\, f(x) \neq g(x)$$ ← (Esto es cierto pues tanto el dominio como el recorrido de f y g son iguales, luego la única forma de que $f \neq g$ es que difieran en sus imágenes)

$$\Rightarrow f^{-1} \neq g^{-1}$$

$$\Rightarrow \Psi(f) \neq \Psi(g)$$

Así Ψ es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, Ψ es biyectiva.

P3. Queremos probar que φ es sobreyectiva, es decir queremos probar que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existe $(L,L') \in \mathcal{L}^2$ un par de rectas que se intersecten en el punto (x,y).

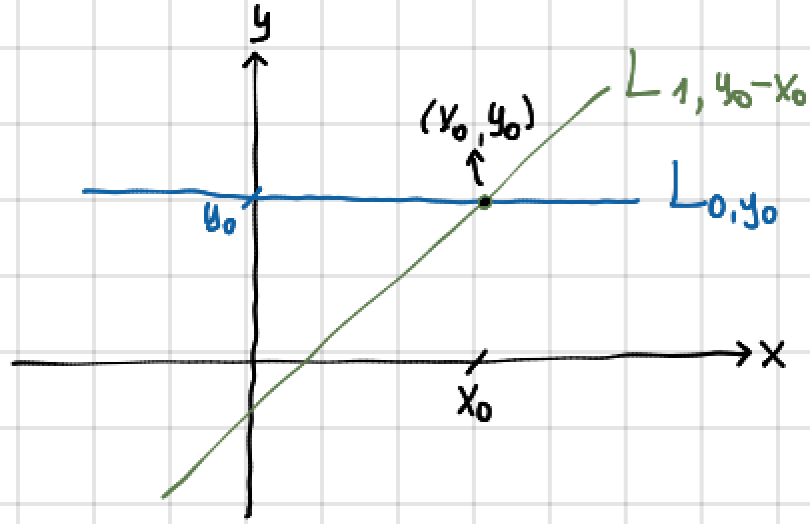
En efecto sabemos que por cada punto en $\mathbb{R}^2$ pasan infinitas rectas luego basta mostrar 2 rectas que se intersecten en dicho punto.

Sea (x_0,y_0), encontremos $(L,L') \in \mathcal{L}^2$ que cumpla $\varphi((L,L')) = (x_0,y_0)$. Tomemos la recta constante $L_{0,y_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_0\}$ y la recta $L_{1,y_0-x_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + y_0 - x_0\}$, las cuales efectivamente no son paralelas (Los coef. acompañando a x son distintos, 0 y 1 respectivamente), y ambos pasan por el punto (x_0,y_0), luego $\varphi((L_{0,y_0}, L_{1,y_0-x_0})) = (x_0,y_0)$ y $(L_{0,y_0}, L_{1,y_0-x_0}) \in \mathcal{L}^2$, con lo que hemos probado que $(\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2)(\exists (L,L') \in \mathcal{L}^2)\, (x_0,y_0) = \varphi((L,L'))$

Es decir φ es sobreyectiva.

¿Puede ser φ inyectiva? (propuesto)

Un dibujito de las rectas :



Bonus! Si no lo saben, o no lo recuerdan :

Las funciones son conjuntos! En particular dado $f: A \to B$ corresponde a un subconjunto de $A \times B$,

$$f = \{(x, y) \in A \times B : f(x) = y\} \subseteq A \times B$$

Disculpen la letra fea ü