Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-4 - Introducción al álgebra

Profesora: María Leonor Varas
Profesora auxiliar: Ivana Bachmann
Fecha: 28 de marzo de 2013

Auxiliar 2: Conjuntos

P1. Sean $A, B, C \subseteq U$, con U el universo, demuestre que:

$$(A\triangle B)\cup(B\triangle C) = (A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$$

Solución:

Recordemos primero que:
- $(A\triangle B) = ([A\cup B]\setminus[A\cap B]) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$
- $A\setminus B = A\cap B^c$
- $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$ y $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$
- $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B = B$ y $A\cap B = A$
- Sea U el universo, $U\setminus A = U\cap A^c = A^c$

$(A\triangle B)\cup(B\triangle C) = ([A\cup B]\setminus[A\cap B])\cup([B\cup C]\setminus[B\cap C])$ (Def. Difernecia simétrica)
$= ([A\cup B]\cap[A\cap B]^c)\cup([B\cup C]\cap[B\cap C]^c)$ (Definición de diferencia)
$= ([A\cup B]\cap[A^c\cup B^c])\cup([B\cup C]\cap[B^c\cup C^c])$ (Prop. de complemento)
Ahora les asignaremos nombres a los términos para trabajarlos comodamente de la forma:
$= (\underbrace{[A\cup B]}_{=A'}\cap\underbrace{[A^c\cup B^c]}_{=B'})(\underbrace{[B\cup C]}_{=C'}\cap\underbrace{[B^c\cup C^c]}_{=D'})$
$= (A'\cap B')\cup(C'\cap D')$
$= (A'\cup(C'\cap D'))\cap(B'\cup(C'\cap D'))$ (distribuimos)
$= (A'\cup C')\cap(A'\cup D')\cap(B'\cup C')\cap(B'\cup D')$ (distribuimos)
En este punto los términos A', B', C' y D' están separados sólo por uniones entre sí y como cada uno de estos términos contiene una unión entre un par de los términos originales A, B y C nos conviene reemplazar A', B', C' y D' por su versión original:
$= ([A\cup B]\cup[B\cup C])\cap([A\cup B]\cup[B^c\cup C^c])\cap([A^c\cup B^c]\cup[B\cup C])\cap([A^c\cup B^c]\cup[B^c\cup C^c])$
Dentro de cada paréntesis ( ) hay solamente uniones por lo que podemos precindir de los paréntesis del tipo [ ]:
$= (A\cup\underbrace{B\cup B}_{B}\cup C)\cap(A\cup\underbrace{B\cup B^c}_{U}\cup C^c)\cap(A^c\cup\underbrace{B\cup B^c}_{U}\cup C)\cap(A^c\cup\underbrace{B^c\cup B^c}_{B^c}\cup C^c)$
$= (A\cup B\cup C)\cap(\underbrace{A\cup U\cup C^c}_{U})\cap(\underbrace{A^c\cup U\cup C}_{U})\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)$
$= (A\cup B\cup C)\cap(U)\cap(U)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)$
$= (A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)$
$= (A\cup B\cup C)\cap(A\cap B\cap C)^c$
$= (A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$

$\blacksquare$

P2. Sea A subconjunto **fijo** del universo U y X,$Y \subseteq U$ cualesquiera, demuestre que:

$$[(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A)] \Longleftrightarrow X = Y$$

Solución:

De aquí en adelante para demostrar cosas se utilizará en general el siguiente hecho:

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$$

$\Longleftarrow)$
Tomamos $X = Y$ como hipótesis (lo suponemos verdadero). Si $X = Y$ basta con ver que:

$$X = Y \ \backslash \cup A \Longrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

y que:

$$X = Y \ \backslash \cap A \Longrightarrow X \cap A = Y \cap A$$

$\Longrightarrow)$
Por contradicción, supongamos que se tiene $X \neq Y$ (i.e suponemos $X = Y$ falsa) y que $[(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A)]$ es verdadera.
Como $X \neq Y$ se tiene que $(\exists \tilde{x} \in X)$ tal que $(\tilde{x} \notin Y)$. Como $(X \cup A = Y \cup A)$ es cierto y $\tilde{x} \in X$ tenemos que $\tilde{x} \in X \cup A$ y por lo tanto $\tilde{x} \in Y \cup A$ pero $\tilde{x} \notin Y$ entonces necesariamente $\tilde{x} \in A$. Dado que $\tilde{x} \in X$ y $\tilde{x} \in A$ tenemos que $\tilde{x} \in X \cap A$ (por la definición de intersección $x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$), pero $X \cap A = Y \cap A$ por lo que $\tilde{x} \in Y \cap A$ lo que implica que $\tilde{x} \in Y$, pero habíamos partido suponiendo que $\tilde{x} \notin Y$. Contradicción.
Como al suponer $X \neq Y$ y $[(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A)]$ se llega a una contradicción necesariamente $(\Longrightarrow)$ es cierta.

∘ La contradicción se basa en suponer que la implicancia que se desea probar es falsa, por lo que suponemos que la hípotesis (en este caso el lado izquierdo) es cierta pero la conclusión (en este caso el lado derecho) es falsa. Si esta implicancia resulta ser verdadera al nosotros suponer que es falsa, y al construir en base a ello, vamos a concluir cosas que no tienen sentido (en este caso partimos suponiendo que $\tilde{x} \notin Y$ y al avanzar sobre ese supuesto terminamos **concluyendo** que $\tilde{x} \in Y$ lo cual no tiene sentido). Luego la implicancia no puede ser falsa y por ende debe ser verdadera, así ésta queda demostrada.

P3. Sean A,B subconjuntos del universo U, y $\mathcal{P}(A)$,$\mathcal{P}(B)$ sus respectivos conjuntos potencia, demuestre que:

(a) $A = B \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

(b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

(c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B \vee B \subseteq A)$

Solución:
Primero recordemos que

$$Q \subseteq A \iff Q \in \mathcal{P}(A) \ (\bigstar)$$

También hay que tener en cuenta que las igualdades de conjuntos se pueden demostrar de forma similar a las equivalencias pues

$$A = B \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

a)
Sea $D \subseteq A$, como $A = B$ se tiene que en particular $A \subseteq B$, luego tenemos que si $D \subseteq A$ entonces $D \subseteq B$ y por $(\bigstar)$ $D \in \mathcal{P}(A)$ y $D \in \mathcal{P}(B)$, en particular como $A \subseteq B$, si $D \subseteq A$ entonces $D \subseteq B$ por lo tanto si $D \in \mathcal{P}(A)$ entonces $D \in \mathcal{P}(B)$. Se tiene entonces:

$$(D \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow D \in \mathcal{P}(B)) \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

Tomando el caso $B \subseteq A$ y repitiendo el proceso anterior se obtiene que si $A = B$ entonces

$$(\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \wedge \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)) \iff (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$$

$\blacksquare$

b)
$\subseteq$)
Sea $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, por la defininción de intersección esto implica que
$C \in \mathcal{P}(A) \wedge C \in \mathcal{P}(B)$. Usando $(\bigstar)$ tenemos que $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$ lo que implica que
$C \subseteq A \cap B$ y por lo tanto $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$ con lo que se tiene:

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$$

$\supseteq$)
Ahora tomemos $F \in \mathcal{P}(A \cap B)$ por $(\bigstar)$ tenemos que $F \subseteq A \cap B$, luego si se encuentra en la intersección significa que se encuentra en cada uno de los conjuntos, es decir
$F \subseteq A \wedge F \subseteq B$, por lo tanto $F \in \mathcal{P}(A) \wedge F \in \mathcal{P}(B)$ nuevamente por la definición de intersección tenemos que $F \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ con lo que se tiene:

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cap B)$$

$\blacksquare$

$\circ$ Para este caso, tanto en $(\subseteq)$ como en $(\supseteq)$ hemos tomado un conjunto cualquiera (que en $(\subseteq)$ hemos llamado C y en $(\supseteq)$ hemos llamado F), fijemonos en que tanto F como C son conjuntos cuya **única** propiedad especial es que $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ y $F \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Al probarse cada propiedad para un conjunto cualquiera que cumple esto, dado que no conocemos nada más sobre el conjunto, es equivalente a haberlo probado para cualquier conjunto que cumpla la misma propiedad, así al probar que si $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ entonces $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$ es equivalente a probar que:

$$(\forall C)(C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow C \in \mathcal{P}(A \cap B)) \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$$

c)
$\Longleftarrow$)
Partimos asumiendo como verdadero que $(A \subseteq B \vee B \subseteq A)$ por lo que podemos suponer que al menos $A \subseteq B$.
Si $A \subseteq B$ entonces todo subconjunto de A es también subconjunto de B:

$$\text{Por transitividad } (C \subseteq A \wedge A \subseteq B) \Rightarrow C \subseteq B$$

por lo tanto, de acuerdo a ($\bigstar$) todo elemento de $\mathcal{P}(A)$ es también elemento de $\mathcal{P}(B)$ es decir $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ entonces $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B)$ y además $A \cup B = B$ por lo que:

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$$

Con lo que se prueba ($\Longleftarrow$).

$\Longrightarrow$)
Por contradicción supondremos que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ y que $(A \nsubseteq B \wedge B \nsubseteq A)$.
Dado que $(A \nsubseteq B \wedge B \nsubseteq A)$ podemos tomar un conjunto

$$D = A' \cup B' \cup C'$$
$$\text{donde } (A' \subseteq A \wedge A' \nsubseteq B),\ (B' \subseteq B \wedge B' \nsubseteq A) \text{ y } (C' \subseteq A \cap B)$$

Se puede ver que $D \subseteq A \cup B$ pues $A', B', C' \subseteq A \cup B$, luego por ($\bigstar$) $D \in \mathcal{P}(A \cup B)$, como dijimos que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$, tenemos que $D \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, sin embargo

$$D \nsubseteq A \text{ pues } D \text{ contiene a } B' \text{ que no es subconjunto de } A \text{ y}$$
$$D \nsubseteq B \text{ pues } D \text{ contiene a } A' \text{ que no es subconjunto de } B$$
$$\text{es decir } (D \nsubseteq A \wedge D \nsubseteq B) \text{ y por lo tanto por } (\bigstar):$$
$$(D \notin \mathcal{P}(A) \wedge D \notin \mathcal{P}(B))$$

Así $(D \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B))$, sin embargo habíamos dicho que $(D \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B))$ (pues $D \in \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$). Contradicción. Es decir necesariamente ($\Longrightarrow$) es cierto.

■

P4. Se define álgebra como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$tal que:
- $X \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra si y sólo si:
(i) $X \in \mathcal{A}$
(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
(iii)$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
(iv)$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Solución:
$\Longleftarrow$) Tomamos como hipótesis que $\mathcal{A}$ cumple:
(i) $X \in \mathcal{A}$
(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
(iv) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
Y queremos ver que entonces se cumple :
(1) $X \in \mathcal{A}$
(2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Dado que $\mathcal{A}$ cumple (i) se tiene que también cumple (1)✓.
Por otro lado notemos que:

$$(2) \iff A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{A}$$

Por (ii) si un conjunto está en $\mathcal{A}$ entonces también su complemento está en $\mathcal{A}$, por (iii) si un par de conjuntios está en $\mathcal{A}$ entonces la intersección de ambos también está en $\mathcal{A}$ luego se concluye gracias a (ii) y (iii) que $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{A}$ y por lo tanto se cumple (2). ✓

$\Longrightarrow$) Tomamos como hipótesis que $\mathcal{A}$ cumple (1) y (2).
Como se cumple (1) necesariamente se cumple (i).✓

Veamos que se cumple (ii):
Basta tomar $X, A \in \mathcal{A}$ (por (1) $X \in \mathcal{A}$) y aplicar (2) que nos dice que $X \setminus A \in \mathcal{A}$, pero sabemos que $X \setminus A = A^c$ luego tenemos que $A^c \in \mathcal{A}$ y probamos que se cumple (ii).✓

Veamos que se cumple (iii):
Ahora ya sabemos que si se tienen (1) y (2) entonces se tiene (ii). Con esto tenemos que:

$$A, B \in \mathcal{A} \underbrace{\Rightarrow}_{por(ii)} A, B^c \in \mathcal{A} \underbrace{\Rightarrow}_{por(2)} A \setminus B^c \in \mathcal{A}$$
$$\text{Donde } A \setminus B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B$$

Por lo tanto con (1) y (2) se tiene $A \cap B \in \mathcal{A}$ i.e se tiene (iii). ✓

Finalmente veamos (iv):
Hemos probado que gracias a (1) y (2) se pueden obtener (i),(ii) y (iii) y por lo tanto podemos usarlas.

$$A, B \in \mathcal{A} \underbrace{\Rightarrow}_{por(ii)} A^c, B^c \in \mathcal{A} \underbrace{\Rightarrow}_{por(iii)} A^c \cap B^c \in \mathcal{A} \underbrace{\Rightarrow}_{por(ii)} (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}$$
$$\text{Donde } (A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B$$

Así obtenemos que $A \cup B \in \mathcal{A}$. Así con (1) y (2) que implican (i), (ii) y (iii) vemos que se cumple (iv).✓

$\blacksquare$