MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 2 de Julio 2014

Trabajo dirigido 7

P1 (Relaciones, números complejos - Examen, año 2013)

Se define en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}$$

1. Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
2. Demostrar que, dado $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, [z]_{\mathcal{R}} = \{a \cdot z | a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$.

Solución

P2 (Grupos - Examen, año 2012)

Sea $G = (1, +\infty)$. Se define en G la ley $*$ por:

$$\forall x, y \in G, x * y = xy - x - y + 2$$

1. Probar que $*$ es una ley de composición interna.
2. Probar que $(G, *)$ es un grupo abeliano.
3. Probar que $(G, *)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.
4. Sea $H = \{q \in \mathbb{Q} | q > 1\}$. Demostrar que $(H, *)$ es subgrupo de $(G, *)$.

Solución

P3 (Anillos - Control 3, Primavera año 2009)

1. Demostrar que en un anillo $(A, +, \cdot)$ con unidad, un divisor de cero no puede tener inverso (para $\cdot$).
2. Probar que en $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$, todo elemento no nulo que no tiene inverso es divisor de cero.
3. Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, consideremos el conjunto $n\mathbb{Z} = \{n \cdot k | k \in \mathbb{Z}\}$. Definimos en $n\mathbb{Z}$ la ley de multiplicación $*$ por:

$$\forall x, y \in n\mathbb{Z}, x * y = \frac{x \cdot y}{n}$$

   Probar que $(n\mathbb{Z}, +, *)$ forma un anillo con unidad. ¿Es un cuerpo?

Solución

P4 (Polinomios)

1. Encontrar todas las raíces del polinomio siguiente, justificando su respuesta.

$$p(x) = x^4 + 4x^3 - 4x - 1$$

2. Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio. Suponemos que $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$. Probar que $x = 1$ es raíz de p.

Solución

P5 (Inducción, sumatorias)

1. Probar que, para todos $p, n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

2. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Calcular $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

3. Calcular $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

4. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe un único par $(p, q) \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2^p(2q+1)$.

Solución

Pauta

P1

1.
   - Sea $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Se tiene $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ entonces $z \mathcal{R} z$ y $\mathcal{R}$ es refleja.

   - Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tales que $z_1 \mathcal{R} z_2$. Entonces $z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}$, por lo tanto existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $z_1 \cdot \overline{z_2} = \lambda$. Luego, $z_2 \cdot \overline{z_1} = \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$. Así, $z_2 \mathcal{R} z_1$ y $\mathcal{R}$ es simétrica.
   - Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tales que $z_1 \mathcal{R} z_2, z_2 \mathcal{R} z_3$. Por lo tanto existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $z_1 \cdot \overline{z_2} = \lambda, z_2 \cdot \overline{z_3} = \mu$. Ahora
   $$z_1 \cdot \overline{z_3} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_3}}{\overline{z_2} \cdot z_2} = \frac{\lambda \cdot \mu}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}$$
   Se concluye que $z_1 \mathcal{R} z_3$, así $\mathcal{R}$ es transitiva.

   Finalmente, $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

2. Sea $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Probemos por doble inclusión que $[z]_{\mathcal{R}} = \big\{a \cdot z | a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\big\}$.

   - Sea $w \in [z]_{\mathcal{R}}$, esto es, tal que $w \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$. Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $w \cdot \overline{z} = b$. Se tiene $b \neq 0$ pues si no, $w = 0$ o $z = 0$ lo que no se puede por hipótesis.
   Ahora,
   $$w = \frac{b}{\overline{z}} \Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{b}{z\overline{z}} = \frac{b}{|z|^2}$$
   Así, denotanto $a = \dfrac{b}{|z|^2} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, se tiene $\dfrac{w}{z} = a$, o sea, $w = a \cdot z$. Y se tiene $[z]_{\mathcal{R}} \subseteq \big\{a \cdot z | a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\big\}$.
   - Sea $v \in \big\{a \cdot z | a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\big\}$, sea $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tal que $v = a \cdot z$. Tenemos $z \cdot \overline{v} = z \cdot a \cdot z = a \cdot z \cdot \overline{z} = a \cdot |z|^2 \in \mathbb{R}$, por lo tanto $z \mathcal{R} v$ y $v \in [z]_{\mathcal{R}}$, y se tiene $[z]_{\mathcal{R}} \supseteq \big\{a \cdot z | a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\big\}$.

   Con esto concluimos que $[z]_{\mathcal{R}} = \big\{a \cdot z | a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\big\}$.

Volver al enunciado

P2

1. Sean $x, y \in G$, demostremos que $x * y \in G$.

$$\begin{aligned} xy - x - y > -1 \Leftrightarrow &\quad x(y-1) - y > -1 \\ \Leftrightarrow &\quad x(y-1) > y-1 \\ \Leftrightarrow &\quad x > \frac{y-1}{y-1} = 1 \quad \text{pues } y-1>0 \\ \Leftrightarrow &\quad V \quad \text{pues } x \in G \end{aligned}$$

Así, $xy - x - y > -1$, por lo tanto $x * y = xy - x - y + 2 > 1$ y $x * y \in G$. Entonces, $*$ es una ley de composición interna.

2.
   - Probemos primero que $*$ es conmutativa. Sean $x, y \in G$.

   $$x * y = xy - x - y + 2 = yx - y - x + 2 = y * x$$

   entonces $*$ es conmutativa.

   - Probemos que $*$ es asociativa. Sean $x, y, z \in G$.

   $$\begin{aligned} (x*y)*z = &\quad (xy - x - y + 2) * z \\ = &\quad (xy - x - y + 2)z - (xy - x - y + 2) - z + 2 \\ = &\quad xyz - xz - yz + 2z - xy + x + y - 2 - z + 2 \\ = &\quad xyz - xy - yz - xz + x + y + z \end{aligned}$$

   Por otro lado,

   $$\begin{aligned} x*(y*z) = &\quad x * (yz - y - z + 2) \\ = &\quad x(yz - y - z + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2 \\ = &\quad xyz - xy - xz + 2x - x - yz + y + z - 2 + 2 \\ = &\quad xyz - xy - yz - xz + x + y + z \end{aligned}$$

   Se tiene $x * (y * z) = (x * y) * z$ por lo tanto $*$ es asociativa.

   - Probemos que $(G, *)$ tiene neutro. Sea $e \in G$.

   $$\begin{aligned} e \text{ es neutro para } * \Leftrightarrow &\quad \forall x \in G, x * e = x \\ \Leftrightarrow &\quad \forall x \in G, xe - x - e + 2 = x \\ \Leftrightarrow &\quad \forall x \in G, (e-2)x + (2-e) = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad (e - 2 = 0) \wedge (2 - e = 0) \quad \text{pues un polinomio es nulo } \textit{ssi} \text{ todos sus coeficientes son nulos} \\ \Leftrightarrow &\quad e = 2 \end{aligned}$$

   Demostramos que e es neutro $\Leftrightarrow e = 2$, y $2 \in G$, por lo tanto $(G, *)$ tiene neutro que es $e = 2$.

   - Probemos que todo elemento de G tiene inverso para $*$. Sean $x, y \in G$.

   $$\begin{aligned} y \text{ es inverso de } x \Leftrightarrow &\quad x * y = 2 \\ \Leftrightarrow &\quad xy - x - y + 2 = 2 \\ \Leftrightarrow &\quad y(x-1) - x = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad y = \frac{x}{x-1} \text{ pues } x - 1 > 0 \end{aligned}$$

   Como $x > x - 1$, se tiene $\frac{x}{x-1} > 1$, es decir que $\frac{x}{x-1} \in G$. Por lo tanto x es invertible y $x^{-1} = \frac{x}{x-1}$.

   Finalmente, $(G, *)$ es grupo abeliano.

3. Busquemos un isomorfismo f de $(R_+^*, \cdot)$ a $(G, *)$. Vemos que este isomorfismo debe transformar un elemento estrictamente positivo en un elemento estrictamente superior a 1. La función $f : \mathbb{R}_+^* \to G$ definida por $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x+1$ parece ser un buen candidato. Veamos que f es isomorfismo.

   - f es morfismo: sean $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Tenemos $f(x \cdot y) = xy + 1$. Por otro lado,

   $$\begin{aligned} f(x) * f(y) = & \quad f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 2 \\ = & \quad (x+1)(y+1) - (x+1) - (y+1) + 2 \\ = & \quad xy + x + y + 1 - x - 1 - y - 1 + 2 \\ = & \quad xy + 1 \\ = & \quad f(x \cdot y) \end{aligned}$$

   Se tiene $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ por lo tanto f es morfismo de grupos entre $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ y $(G, *)$.
   - f es biyectiva: veamos que f tiene inverso. Sea $g : G \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $\forall x \in G, f(x) = x - 1$.
   Claramente se tiene que
   $\forall x \in G, f \circ g(x) = f(x-1) = x - 1 + 1 = Id_G(x)$, y $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g \circ f(x) = g(x+1) = (x+1) - 1 = x = Id_{\mathbb{R}_+^*}(x)$.
   Finalmente, $g = f^{-1}$ y f es biyectiva.

   Con todo esto se concluye que f es un isomorfismo.

4. Se tiene que $H \subseteq G$ y como $2 \in H, H \neq \varnothing$. Sean $x, y \in H$. Mostremos que $x * y^{-1} \in H$.

   $$x * y^{-1} = \quad xy^{-1} - x - y^{-1} + 2 = x\frac{y}{y-1} - x - \frac{y}{y-1} + 2 \in \mathbb{Q}$$

   Además, como $*$ es ley de composición interna y que $x, y^{-1} \in G, x * y^{-1} \in G$ entonces $x * y^{-1} > 1$. $x * y^{-1} \in H$, y $(H, *)$ es subgrupo de $(G, *)$.

Volver al enunciado

P3

1. Sea $(A, +, \cdot)$ anillo con unidad, sea $a \in A$ un divisor de cero. Entonces $a \neq 0$ y existe $b \neq 0$ tal que $a \cdot b = 0$. Por contradicción, si a tuviera inverso, entonces $a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0$, luego $b = 0$, contradicción. Entonces a no puede tener inverso.

2. Sea $z \in \mathbb{Z}_n$ no nulo que no tiene inverso. Entonces $z \notin \{0, 1\}$. Sea $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n \backslash \{1\}$ definida por $\varphi(y) = z \cdot_n y$. Notar que el recorrido de φ es $\mathbb{Z}_n \backslash \{1\}$ pues como z no tiene inverso, 1 no tiene preimagen para φ. Dado que $|\mathbb{Z}_n| = n < n - 1 = |\mathbb{Z}_n \backslash \{1\}|$, φ no puede ser inyectiva. Entonces existen $y_1 \neq_n y_2 \in \mathbb{Z}_n$ tales que $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$, o sea, $z \cdot_n y_1 = z \cdot_n y_2$, y luego $z \cdot_n (y_1 - y_2) = 0$. Pero $z \neq_n 0$ y $y_1 - y_2 \neq_n 0$, y esto demuestra que z es divisor de cero.

3.
   - Probemos primero que $(n\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano, probando que es subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$. Ya sabemos que $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ y que $n\mathbb{Z} \neq \varnothing$ pues $0 \in n\mathbb{Z}$. Sean $x, y \in n\mathbb{Z}, x = np, y = nq, p, q \in \mathbb{Z}$. $x - y = np - nq = n(p-q) \in n\mathbb{Z}$, y $n\mathbb{Z}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}$.
   - Demostremos que $*$ es asociativa. Sean $x, y, z \in n\mathbb{Z}$, sean $p, q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $x = np, y = nq, z = nr$.

   $$(x * y) * z = \left(\frac{x \cdot y}{n}\right) * z = \frac{\frac{x \cdot y}{n} \cdot z}{n} = \frac{x \cdot y \cdot z}{n^2} = \frac{x \cdot \frac{y \cdot z}{n}}{n} = x * \left(\frac{y \cdot z}{n}\right) = x * (y * z)$$

   Así $*$ es asociativa.
   - Demostremos que $*$ distribuye con respeto a $+$. Sean $x, y, z \in n\mathbb{Z}$.

   $$x * (y + z) = \frac{x \cdot (y + z)}{n} = \frac{x \cdot y}{n} + \frac{x \cdot z}{n} = x * y + x * z$$

   De la misma manera, $(x + y) * z = x * z + y * z$ y $*$ distribuye con respeto a $+$.

- Veamos que $n = n \cdot 1 \in n\mathbb{Z}$ es neutro para $*$. Sea $x \in n\mathbb{Z}$.

$$x * n = \frac{x \cdot n}{n} = x = \frac{n \cdot x}{n} = n * x$$

  Así, n es neutro para $*$.

Todo demuestra que $(n\mathbb{Z}, +, *)$ es anillo con unidad. No neceriamente es cuerpo: por ejemplo, si $n = 3$, $x = 6 = 3 \cdot 2$ no tiene inverso. En efecto, si tuviera inverso y, se tendría $x * y = n = 3$, es decir $\dfrac{6 \cdot y}{3} = 3$, luego $2 \cdot y = 3$ e $y = \frac{3}{2}$. Pero $\frac{3}{2} \notin n\mathbb{Z}$, por lo tanto x no tiene inverso.

Volver al enunciado

P4

1. Notemos que 1 y -1 son raíces de p. Factoricemos p con la regla de Ruffini:

   - Factorización por $(x - 1)$:

1	1	4	0	-4	1
	1	5	5	1	0

     Entonces $p(x) = (x - 1)(x^3 + 5x^2 + 5x + 1)$.
   - Ahora, factoricemos $x^3 + 5x^2 + 5x + 1$ por $(x + 1)$:

-1	1	5	5	1
	1	4	1	0

     Así, $p(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 4x + 1)$.
   - Busquemos ahora las raíces de $q(x) = x^2 + 4x + 1$.
     $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12$, luego $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3}$.

   Las raíces de p son entonces $-1, 1, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$.

2. Es directo: $p(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k 1^k = \sum_{k=0}^{n} a_k = 0$, por lo tanto $x = 1$ es raíz de p.

Volver al enunciado

P5

1. Probemos este resultado por inducción sobre n. Sea $p \in \mathbb{N}$.
   Caso base ($n = 0$):
$$\sum_{k=0}^{0} \binom{p+k}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1} = \binom{p+0+1}{p+1}$$
   Entonces el resultado vale para $n = 0$.
   Paso inductivo: sea $n \in \mathbb{N}$ tal que el resultado sea cierto.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{p} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} + \binom{p+n+1}{p} && \text{descomponiendo la sumatoria} \\ &= \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} && \text{por hipótesis de inducción} \\ &= \binom{p+n+2}{p+1} && \text{por la fórmula de Pascal} \end{aligned}$$
   Eso demuestra que el resultado vale para $n + 1$, y por inducción, que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculemos usando números complejos.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Im}(e^{ik\theta}) \\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta}\right) \\
&= \mathrm{Im}((1+e^{i\theta})^n) \quad \text{por el binomio de Newton} \\
&= \mathrm{Im}[(e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}))^n] \quad \text{factorizando por } e^{i\theta/2} \\
&= \mathrm{Im}[e^{in\theta/2} \cdot (2\cos(\theta/2))^n] \\
&= 2^n \cos(\theta/2)^n \operatorname{sen}(n\theta/2)
\end{aligned}$$

3. Busquemos como reescribir R_n como suma telescópica. Notemos que, para $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+2} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k} = \frac{k(k+1) - 2k(k+2) + (k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

4. Probemos la existencia por la segunda forma del principio de inducción.
Caso base ($n = 1$): $1 = 2^0(2 \cdot 0 + 1)$, entonces el caso $n = 1$ es cierto con $p = q = 0$.
Paso inductivo: Sea $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, supongamos que el resultado sea cierto para todo $k \leq n$. Probemos que es cierto para $n + 1$.

   - Si n es par, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2m$. Luego $n + 1 = 2m + 1 = 2^0(2m + 1)$ y el resultado vale con $p = 0, q = m$.
   - Si n es impar, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2m + 1$, luego $n + 1 = 2m + 2 = 2(m + 1)$. Por hipótesis de inducción, dado que $m + 1 \leq n$, existen $p_0, q_0 \in \mathbb{N}$ tales que $m + 1 = 2^{p_0}(2q_0 + 1)$. Sale que $n + 1 = 2(m + 1) = 2 \cdot 2^{p_0}(2q_0 + 1) = 2^{p_0+1}(2q_0 + 1)$ y el resultado vale, con $p = p_0 + 1, q = q_0$.

   Por inducción, se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $n = 2^p(2q + 1)$.

   Ahora, probemos la unicidad.
   Supongamos que exista $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ tales que $n = 2^p(2q + 1) = 2^{p'}(2q' + 1)$.
   Por contradicción, supongamos que $p \neq p'$, por ejemplo $p > p'$. Entonces $2^{p-p'}(2p + 1) = 2q' + 1$. Pero el término de izquierda es par y el término de derecha es impar, contradicción. Entonces $p = p'$, y se deduce de forma inmediata que $q = q'$, y se tiene la unicidad.

Volver al enunciado