MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 3 de Julio 2014

Auxiliar Extra Examen II

P1

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Probar que P es sobreyectivo, si y sólo si, $\text{gr}(P) \geq 1$.
   Hint: usar el teorema fundamental del álgebra.

2. En esta parte, probaremos que P es inyectivo, si y sólo si, $\text{gr}(P) = 1$.

   a) Demostrar que si $\text{gr}(P) = 1$, entonces P es inyectivo.
   b) Probar que si $\text{gr}(P) < 1$, entonces P no es inyectivo.
   c) Sea $n > 1$, sean $\lambda, a \in \mathbb{C}$, sea $Q \in \mathbb{C}[X]$ el polinomio definido por $Q(z) = \lambda(z-a)^n$.
   Probar que existen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2$ tales que $Q(z_1) = Q(z_2) = \lambda$ y por lo tanto que Q no es inyectivo..
   Hint: ocupar raíces de la unidad.
   d) Concluir que si $\text{gr}(P) > 1$, entonces P no es inyectivo.

P2 (Examen, año 2010)

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$. Probar que f es un isomorfismo entre $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

2. Sea $(G, *)$ un grupo, sea $(H, *)$ un subgrupo de G. Dado $x \in G$, se define el conjunto $x * H = \{x * h, h \in H\}$.

   a) Probar que para todo $x \in G, x * H = H \Leftrightarrow x \in H$.
   b) Probar que para todo $y \in G \backslash H, (y * H) \cap H = \varnothing$.

P3 (Examen - año 2009)

Definimos en $\mathbb{C}$ la relación $\sim$ por:

$$z \sim x \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, n \leq \text{mín}(|z|, |w|) \wedge \text{máx}(|z|, |w|) < n + 1)$$

1. Mostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia

2. Dibujar la clase de equivalencia del complejo $3 - i$ en el plano complejo.

3. Demostrar que el conjunto cuociente $\mathbb{C}/\sim$ es igual al conjunto $\{[ki]_\sim | k \in \mathbb{N}\}$.

P4 (Examen - año 2012)

1. Probar que:
$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\text{Im}(z) = 0 \vee |z| = 1)\right)$$

2. Determinar a, b reales de tal modo que $1 + i$ sea una solución de la ecuación $x^5 + ax^3 + b = 0$.

3. Resolver la ecuación $z^3 + i = 0$.

P5 (Examen - año 2013)

1. Calcular, para todo $n \in \mathbb{N}$, el valor de $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}$ y $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j}$.

   A partir de los resultados obtenidos, calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}$.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

   a) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}, a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

   b) Usar lo anterior para demostrar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k < 3$.

P6

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se define el polinomio P_n por $P_n(x) = x^{2n} + x^n + 1$, y el polinomio Q por $Q(x) = x^2 + x + 1$. ¿Para qué valores de n se tiene que Q divide a P_n?

P7

Se define en $\mathbb{R}_+^*$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n.$$

Probar que es una relación de orden. ¿Es orden total?