MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 20 de Junio 2014

Trabajo dirigido 6

Números complejos

P1

1. Sea $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $f(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$. Probar:
$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, f(z_1, z_2) \cdot f(\overline{z_1}, \overline{z_2}) \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$
2. Encontrar la parte real y la parte imaginaria del número complejo $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$.

Solución

P2

1. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Demostrar las fórmulas de Euler:
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$
2. Sin ocupar la escritura cartesiana $a + ib$, calcular el módulo y el argumento de $1 - e^{i\theta}$.
Hint: factorizar por $e^{i\frac{\theta}{2}}$.
3. Usar lo anterior para encontrar todos los números complejos z tales que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$.

Solución

P3

1. Sean $z_0, \cdots, z_{n-1}$ las n raíces n-ésimas de la unidad, ordenadas según argumento creciente. Demostrar que
$$z_0 \cdot z_1 + z_1 \cdot z_2 + \cdots + z_{n-2} \cdot z_{n+1} + z_{n-1} \cdot z_0 = 0.$$
Hint: puede ser útil hacer primero el caso $n = 3$.
2. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $\omega \neq 1$. Probar que
$$(1 + \omega)^3 + (1 + \omega^2)^9 + (1 + \omega^3)^6 = 62.$$

Solución

Polinomios

P4

Para todo $P \in \mathbb{K}[X]$, se define el polinomio $\widehat{P}$ por $\forall x \in \mathbb{K}, \widehat{P}(x) = P(x + 1)$. Sea $\Delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ definida por $\Delta(P) = \widehat{P} - P$.

1. Probar que Δ es un morfismo de grupos entre $(\mathbb{K}[X], +)$ y $(\mathbb{K}[X], +)$. ¿Es morfismo de anillos?
2. Probar que, para todo $P \in \mathbb{K}[X]$, se tiene $\text{gr}(\Delta(P)) \leq \text{gr}(P) - 1$.

Solución

P5

Sea $P = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[X]$ de grado n. Se dice que P es un polinomio *recíproco* si $\forall j \in \{0, 1, \cdots, n\}$ se tiene $a_j = a_{n-j}$.

1. Probar que P es recíproco, si y soló si, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, P(x) = x^n P(\frac{1}{x})$.
2. Probar que el producto de dos polinomios recíprocos es recíproco.
3. Probar que, si P es un polinomio recíproco no nulo y que $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $P(\alpha) = 0$, entonces $\alpha \neq 0$ y $P(\frac{1}{\alpha}) = 0$.
4. Sean P, Q, R tres polinomios tales que $P = QR$ y P, Q son recíprocos. Probar que R es recíproco.

Solución

Pauta

P1

1. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) \cdot f(\overline{z_1}, \overline{z_2}) &= |z_1 + z_2| \cdot |\overline{z_1} + \overline{z_2}| \\ &= |(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})| \\ &= |z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}| \\ &= ||z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2| \\ &= ||z_1|^2 + 2\text{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2| \\ &\leq ||z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2| \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

2. Escribamos z en forma polar.
Se tiene $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Luego, $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 2e^{i\pi/3}$.
Por otro lado, $|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Luego, $1-i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.
Ahora, $z = \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = \frac{2^{20}e^{20i\pi/3}}{\sqrt{2}^{20}e^{-20i\pi/4}} = \frac{2^{20}e^{2i\pi/3}}{2^{10}e^{-5i\pi}} = \frac{2^{10}e^{2i\pi/3}}{-1} = -2^{10}(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$.
Se concluye que $\text{Re}(z) = -2^{10}\cos(2\pi/3) = -2^{10} \times (-\frac{1}{2}) = 2^9$ e $\text{Im}(z) = -2^9\sin(2\pi/3) = -2^9\frac{\sqrt{3}}{2} = -2^9\sqrt{3}$.

Volver al enunciado

P2

1. Calculemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) &= \frac{1}{2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\cos(\theta) \\ &= \cos(\theta). \end{aligned}$$

De la misma forma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) &= \frac{1}{2}(\cos(\theta)+i\sin(\theta)-\cos(-\theta)-i\sin(-\theta))\\ &= \frac{1}{2i}(\cos(\theta)+i\sin(\theta)-\cos(\theta)+i\sin(\theta))\\ &= \frac{1}{2i}\times 2i\sin(\theta)\\ &= \sin(\theta).\end{aligned}$$

2. Ahora, escribamos

$$1-e^{i\theta}=e^{i0}-e^{i\theta}=e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})}-e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})}=e^{i\theta/2}e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}e^{i\theta/2}=e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})=-2i\operatorname{sen}(\theta/2)e^{i\theta/2}.$$

Por lo tanto, $|1-e^{i\theta}|=2|i||\operatorname{sen}(\theta/2)||e^{i\theta/2}|=2|\operatorname{sen}(\theta/2)|$.
Para encontrar el argumento, escribamos la forma polar de $1-e^{i\theta}$. Primero, como $-i=e^{-i\pi/2}$, se puede reescribir $1-e^{i\theta}=-2i\operatorname{sen}(\theta/2)e^{i\theta/2}=2\operatorname{sen}(\theta/2)e^{-i\pi/2}e^{i\theta/2}=2\operatorname{sen}(\theta/2)e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$. Ahora:

- Si $\operatorname{sen}(\theta/2)\geq 0$, entonces se tiene la forma polar y $\arg(1-e^{i\theta})=\frac{\theta-\pi}{2}$.
- Si $\operatorname{sen}(\theta/2)<0$, escribamos $1-e^{i\theta}=(-2\operatorname{sen}(\theta/2))(-e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})})$.
  Ahora, como $-1=e^{i\pi}$, se tiene $1-e^{i\theta}=(-2\operatorname{sen}(\theta/2))e^{i\pi}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}=(-2\operatorname{sen}(\theta/2))e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}$. Eso es la forma polar, y $\arg(1-e^{i\theta})=\frac{\theta+\pi}{2}$.

3. Si z cumple con la condición, se tiene $|z|=|\frac{1}{z}|$, entonces $|z|^2=1$ y $|z|=1$. Entonces existe $\theta\in\mathbb{R}$ tal que $z=e^{i\theta}$.
Pero también se tiene $1=|z|=|1-z|=|1-e^{i\theta}|=2|\operatorname{sen}(\theta/2)|$, por lo tanto $|\operatorname{sen}(\theta/2)|=\frac{1}{2}$, lo que implica $\operatorname{sen}(\theta/2)\in\{-1/2,1/2\}$, luego $\theta/2\in\{-\pi/6,\pi/6,5\pi/6,7\pi/3\}$ y $\theta\in\{-\pi/3,\pi/3,5\pi/3,7\pi/3\}$.
Finalmente, dado que $e^{5i\pi/3}=e^{i\pi/3}$ y $e^{7i\pi/3}=e^{-i\pi/3}$, se tiene $z\in\{e^{-i\pi/3},e^{i\pi/3}\}$.

Volver al enunciado

P3

1. Como lo sugiere el enunciado, veamos primero el caso $n=3$.
$z_0z_1+z_1z_2+z_2z_0=1\cdot e^{2i\pi/3}+e^{2i\pi/3}e^{4i\pi/3}+e^{4i\pi/3}\cdot 1=z_1+e^{6i\pi/3}+z_2=z_1+z_0+z_2=0.$
Ahora, sea n cualquiera, denotamos $z_n=z_0$. Queremos entonces probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z_kz_{k+1}=0$.
Recordemos que $\forall k\in\{0,\cdots,n\}, z_k=z_1^k$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1}z_kz_{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}z_1^kz_1^{k+1}=z_1\sum_{k=0}^{n-1}(z_1^2)^k=z_1\sum_{k=0}^{n-1}z_2^k=z_1\frac{1-z_2^n}{1-z_2}=z_1\frac{1-1}{1-z_2}=0.$$

2. Recordemos que $1+\omega+\omega^2=0$, y $\omega^3=1$, entonces $1+\omega=-\omega^2$ y $1+\omega^2=-\omega$.
Luego, $(1+\omega)^3+(1+\omega^2)^9+(1+\omega^3)^6=(-\omega^2)^3+(-\omega)^9+(1+1)^6=-\omega^6-\omega^9+2^6=-1-1+64=62.$

Volver al enunciado

P4

1. Sean $P,Q\in\mathbb{K}[X]$. Calculemos $\Delta(P+Q)=\widehat{P+Q}-(P+Q)=\widehat{P}+\widehat{Q}-P-Q=(\widehat{P}-P)+(\widehat{Q}-Q)=\Delta(P)+\Delta(Q)$.
Entonces Δ es morfismo de grupos.
Pero no es morfismo de anillos sobre $(\mathbb{K},+,\cdot)$: en efecto, si tomamos $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ definidos por $P(x)=Q(x)=x$, tenemos, para todo $x\in\mathbb{K}$:
- Por un lado, $\Delta(P\cdot Q)(x)=P(x+1)Q(x+1)-P(x)Q(x)=(x+1)^2-x^2=2x+1$.
- Por otro lado, $\Delta(P)(x)\cdot\Delta(Q)(x)=(x+1-x)(x+1-x)=1\cdot 1=1$.
No se tiene igualdad, esto prueba que Δ no es un morfismo de anillos.

2. Escribamos $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\Delta(P)(x) &= P(x+1) - P(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (x+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \Big) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{por el binomio de Newton} \\
&= a_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Big(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \Big) - a_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \quad \text{despejando el último término de las sumatorias} \\
&= a_n \binom{n}{n} x^n + a_n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} x^j + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Big(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \Big) - a_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \\
&= a_n x^n + a_n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} x^j + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Big(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \Big) - a_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \\
&= a_n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} x^j + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Big(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \Big) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \quad \text{cancelando los términos } a_n x^n
\end{aligned}$$

Todos los términos que quedan tienen grado a lo más $n-1$, por lo tanto $\mathrm{gr}(\Delta(P)) \leq n - 1 = \mathrm{gr}(P) - 1$.

Volver al enunciado

P5

1. $\underline{\Rightarrow}$: supongamos que P sea recíproco. Sea $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

$$\begin{aligned}
x^n P\Big(\frac{1}{x}\Big) &= x^n \sum_{j=0}^{n} a_j \Big(\frac{1}{x}\Big)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j} \quad \text{distribuyendo } x^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} x^{n-j} \quad \text{pues } P \text{ es recíproco } (a_j = a_{n-j}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{con el cambio de índice } k = n - j \\
&= P(x).
\end{aligned}$$

$\underline{\Leftarrow}$: ahora, supongamos que se tenga $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, P(x) = x^n P\big(\frac{1}{x}\big)$. Entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}$$

Luego, haciendo los cambios de índice $k = n - j$ en el lado derecho y $k = j$ en el lado izquierdo:

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k$$

Como dos polinomios son iguales si y soló si tienen mismos coeficientes, se tiene entonces $\forall k \in \{0, \cdots, n\}, a_k = a_{n-k}$ y P es recíproco.

2. Sean P, Q dos polinomios recíprocos, sean $n = \mathrm{gr}(P), m = \mathrm{gr}(Q)$. Entonces $\mathrm{gr}(PQ) = n + m$. Ahora

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, x^{n+m}(PQ)\Big(\frac{1}{x}\Big) = x^n x^m P\Big(\frac{1}{x}\Big)Q\Big(\frac{1}{x}\Big) = x^n P\Big(\frac{1}{x}\Big)x^m Q\Big(\frac{1}{x}\Big) = P(x)Q(x).$$

Por la parte 1., se tiene entonces que PQ es un polinomio recíproco.

3. Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ polinomio recíproco no nulo, sea $n = \mathrm{gr}(P)$, escribamos $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P(\alpha) = 0$. Notemos que $P(0) = a_0$ y como P es recíproco, $a_0 = a_n \neq 0$ (pues si $a_n = 0$ se tendría $\mathrm{gr}(P) < n$). Entonces $P(0) \neq 0$ y $\alpha \neq 0$. Podemos entonces ocupar 1. para escribir

$$0 = P(\alpha) = \alpha^n P\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)$$

por lo tanto, como $\alpha^n \neq 0$, se tiene $P\big(\frac{1}{\alpha}\big) = 0$.

4. Sean $n = \mathrm{gr}(P), s = \mathrm{gr}(Q), t = \mathrm{gr}(R)$. Como $P = QR$, se tiene $\mathrm{gr}(P) = \mathrm{gr}(Q) + \mathrm{gr}(R)$, o sea, $n = s + t$. Se tiene además $R = \frac{P}{Q}$. Probemos que R cumple con la condición de 1.

$$\begin{aligned}
x^t R\Big(\frac{1}{x}\Big) &= x^t \frac{P(\frac{1}{x})}{Q(\frac{1}{x})} \\
&= x^{n-s} \frac{P(\frac{1}{x})}{Q(\frac{1}{x})} \\
&= \frac{x^n P(\frac{1}{x})}{x^s Q(\frac{1}{x})} \\
&= \frac{P(x)}{Q(x)} \\
&= R(x)
\end{aligned}$$

R cumple con la condición de 1., por lo tanto R es recíproco.