MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 19 de Junio 2014

Auxiliar 13 - Polinomios

P1

Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{n-1}\}$ el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad, ordenadas según argumento creciente. Sea $z \in \mathbb{C}$. Calcular

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega_k)^n.$$

P2 (Control 6 - año 2012)

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio. Se define la función $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $\forall x \in \mathbb{C}, Q(x) = P(ix)$.

1. Probar que Q es polinomio y dar explícitamente sus coeficientes en función de los de P.
2. Probar que $P = Q \Leftrightarrow$ para cada k que no es múltiplo de 4, $a_k = 0$.

P3

Resolver las siguientes ecuaciones (la incógnita siendo $P \in \mathbb{K}[X]$):

1. $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$.
2. $P \circ P = P$.

P4

Dado un polinomio $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{K}[X]$, se define su polinomio derivado $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

1. Si $n = \mathrm{gr}(P)$, ¿cuánto vale $\mathrm{gr}(P')$?
2. Sea $d \in \mathbb{K}$. Probar que si $P = (x-d)^n$ entonces $P' = n(x-d)^{n-1}$ (por inducción sobre n).
3. Encontrar todos los polinomios $P \in \mathbb{K}[X]$ tales que $P'^2 = 4P$.

P5

Ocupando el hecho de que la suma de las raíces quintas de la unidad vale cero, calcular $\cos(2\pi/5)$.