MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 5 de Junio 2014

Auxiliar 11 - Anillos

P1 (Control 5 - año 2012)

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Se define $G \subseteq A$ por

$$G = \{a \in A | a \text{ tiene inverso para } \cdot\}$$

1. Probar que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano.
2. Sea $H = \{a^2 | a \in G\}$. Probar que $(H, \cdot)$ es subgrupo de $(G, \cdot)$.
3. Si $A = \mathbb{Z}_8$, encontrar G y H.

P2 (Control 5 - año 2011)

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

1. Si $a \in A$ es divisor de cero y $b \in A$ cualquiera, demostrar que $a \cdot b = 0_A$ o $a \cdot b$ es divisor de cero.
2. Demostrar que si el producto de dos elementos de A es un divisor de cero, entonces al menos uno de ellos es un divisor de cero.

P3

Se define el conjunto $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib | a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Probar que $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, encontrar sus elementos invertibles.

P4

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad. Suponemos que A es *de orden finito*, es decir

$$\forall a \in A, \{a^n | n \in \mathbb{N}\} \text{ es un conjunto finito.}$$

Sea $a \in A$. Probar que a es divisor de cero, si y soló si, no es invertible.

P5

Dados dos anillos $(A_1, +_1, \cdot_1), (A_2, +_2, \cdot_2)$ con unidad y una función $f : A_1 \to A_2$, se dice que f es un morfismo de anillos entre $(A_1, +_1, \cdot_1)$ y $(A_2, +_2, \cdot_2)$ si :

- f es un morfismo de grupos entre $(A_1, +_1)$ y $(A_2, +_2)$
- $\forall a, b \in A_1, f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b)$
- $f(1_{A_1}) = 1_{A_2}$.

Se dice que es un *isomorfismo* si además es biyectiva.

Se consideran los anillos siguientes:

- $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ donde $(a, b) + (c, d) = (a +_2 c, b +_2 d)$ y $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot_2 c, b \cdot_2 d)$.
- $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$, este anillo ya se vió en cátedra

- $(\mathbb{F}_4, \oplus, \otimes)$ donde $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $\oplus = +_4$ y $\otimes$ está definida mediante la siguiente tabla:

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

  Probar que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ y $\mathbb{Z}_4$ no son isomorfos como grupos, y que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ y $\mathbb{F}_4$ no son isomorfos como anillos.