**MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.**
**Profesor:** José Soto
**Auxiliares:** Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
**Fecha:** 16 de Mayo 2014

# Auxiliar 9 - Cardinalidad, estructuras algebraicas

**Recordatorio**

Sea $A$ un conjunto no vacío. Una *ley de composición interna* es una función $* : A \times A, (x, y) \mapsto x * y$. Al par $(A, *)$ se le llama *estructura algebraica*. Dada una estructura algebraica $(A, *)$, se dice que su ley es

- *asociativa* si $\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$.
- *conmutativa* si $\forall x, y \in A, x * y = y * x$.

Si $e \in A$, se dice que $e$ es:

- *elemento neutro para* $*$ si $\forall x \in A, x * e = e * x = x$.
- *absorbente* si $\forall x \in A, x * e = e * x = e$.
- *idempotente* si $e * e = e$.

Además

- Si $*$ tiene un neutro $e \in A$, dados $x, y \in A$, diremos que $y$ es *el inverso de* $x$ *por* $*$ si $x * y = y * x = e$.
- Si tenemos dos leyes $*, \triangle$ en $A$, se dice que $\triangle$ distribuye con respeto a $*$ si

$$\forall x, y, z \in A, [x \triangle (y * z) = (x \triangle y) * (x \triangle z)] \wedge [(y * z) \triangle x = (y \triangle x) * (y \triangle z)]$$

### P1

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$. Demostrar que $\mathcal{D}$ es infinito no numerable.

### P2

Definimos la estructura algebraica $(\mathbb{R}, *)$ por $\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = x + y - xy$.

1. Demostrar que $*$ es una ley de composición interna asociativa y conmutativa.
2. Demostrar que $*$ tiene elemento neutro y encontrarlo.
3. ¿Existen elementos invertibles? ¿Idempotentes? ¿Absorbentes?

### P3

Definimos la estructura algebraica $(\mathbb{N}, *)$ por $\forall n, k \in \mathbb{N}, n * k = nk$ (concatenación). Por ejemplo, $2 * 4 = 24, 37 * 12 = 3712$. Estudiar asociatividad, conmutatividad, existencia de neutro, existencia de elementos absorbentes e idempotentes.

### P4 (Control 5 - año 2008)

Sea $(S, *)$ una estructura algebraica con neutro $e$ y $*$ una ley asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ y con inverso $a^{-1} \in S$ se define la operación $\triangle$ en $S$ por:

$$\forall x, y \in S, x \triangle y = x * a * y.$$

1. Demostrar que $\triangle$ es asociativa, tiene neutro y calcularlo.
2. Caracterizar los elementos invertibles para $\triangle$. En particular, probar que $a$ es invertible y calcular su inverso.

### P5

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f \text{ es función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la ley de composición interna $*$ por

$$\forall n \in \mathbb{N}, (f * g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k).$$

1. Demostrar que $*$ es conmutativa.
2. Demostrar que $*$ tiene elemento neutro y encontrarlo.
3. Demostrar que $*$ distribuye con respeto a $+$ (suma de funciones).

### P6 (Teorema de Cantor - Propuesto)

Sea $A$ un conjunto no vacío cualquiera.

1. Demostrar que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.
2. Demostrar que la desigualdad es estricta, es decir que no existe ninguna biyección entre $A$ y $\mathcal{P}(A)$ (en particular, una consecuencia de esto será que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es infinito no numerable).
   *Hint*: Por contradicción, suponer que exista una tal biyección $F$, y dado $x \in A$ fijo, considerar $D = \{x \in A, x \notin F(x)\}$.