MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 25 de Abril 2014

Trabajo dirigido 2

P1

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que n es *par* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$, y que n es *impar* si existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2l + 1$.

1. Demostrar, por inducción, que todo $n \in \mathbb{N}$ es par o impar.

   Solución: Demostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, la proposición $p(n)$: (n es par o impar) es cierta.
   Caso base ($n_0 = 0$): $0 = 2 \times 0$, entonces 0 es par y se tiene el resultado.
   Segunta etapa: sea $n \in \mathbb{N}$ que sea par o impar. Demostremos que $n + 1$ es par o impar.

   - Si n es par, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Luego, $n + 1 = 2k + 1$ es impar y se tiene el resultado.
   - Si n es impar, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2l + 1$. Luego, $n + 1 = 2l + 2 = 2(l + 1)$ es par y también se tiene el resultado.

   $p(n + 1)$ también es cierta, entonces por inducción, $p(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Demostrar, por contradicción, que ningún entero $n \in \mathbb{N}$ puede ser par e impar.

   Solución: por contradicción, supongamos que exista $n \in \mathbb{N}$ que sea par e impar. Entonces existen $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $n = 2k = 2l + 1$. De eso sale $\frac{1}{2} = k - l \in \mathbb{Z}$, contradicción. Se concluye que no puede existir $n \in \mathbb{N}$ que sea par e impar.

3. Se define sobre $\mathbb{N}$ la relación $\mathcal{R}$ por: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x + y$ es par$)$. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, y describir el conjunto cuociente $\mathbb{N}/\mathcal{R}$.

   Solución: veamos primero que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
   Refleja: sea $n \in \mathbb{N}$. $n + n = 2n$ es par, entonces $n\mathcal{R}n$.
   Transitiva: sean $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tales que $n_1\mathcal{R}n_2$ y $n_2\mathcal{R}n_3$. Veamos que $n_1\mathcal{R}n_3$. Por hipótesis, sabemos que existen $k, k' \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + n_2 = 2k$, $n_2 + n_3 = 2k'$. Esto se puede reescribir $n_1 = 2k - n_2$, $n_3 = 2k' - n_2$. Luego, $n_1 + n_3 = 2k - n_2 + 2k' - n_2 = 2(k + k' - n_2)$, entonces $n_1 + n_3$ es par y se tiene $n_1\mathcal{R}n_3$.
   Simétrica: si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ son tales que $n_1\mathcal{R}n_2$, se tiene $n_2 + n_1 = n_1 + n_2$ es par y $n_2\mathcal{R}n_1$.
   Se concluye que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

   Busquemos cuales son las posibles clases de equivalencia. Sean $n, m \in \mathbb{N}$.

   - Si n, m son pares, entonces $n + m$ también es par y $n\mathcal{R}m$.
   - Si n, m son impares, entonces $n + m$ es par y $n\mathcal{R}m$.
   - Si n par y m impar (o al revés), entonces $n + m$ es impar y $n\not\mathcal{R}m$.

   Se concluye que hay dos clases de equivalencia, los números pares y los impares: $\mathbb{N}/\mathcal{R} = \{[0], [1]\}$.

P2 (Control 3 - año 2013)

1. Se define en $\mathbb{R}$ la relación Ψ por $x \, \Psi \, y \ \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$.

   (i) Demuestre que Ψ es una relación de orden.
   Solución:
   Refleja: sea $x \in \mathbb{R}$. $x - x = 0 \in \mathbb{N}$, entonces $x\Psi x$.
   Transitiva: sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x\Psi y, y\Psi z$. Mostremos que $x\Psi z$.
   Sabemos que $y - x \in \mathbb{N}, z - y \in \mathbb{N}$. Entonces $z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{N}$ dado que es suma de dos números naturales, con lo que se concluye que $x\Psi z$.

Antisimétrica: sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x\Psi y$ e $y\Psi x$.
$x\Psi y \Rightarrow y - x \in \mathbb{N} \Rightarrow y - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x$.
$y\Psi x \Rightarrow x - y \in \mathbb{N} \Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow x \geq y$.
La relación de orden usual $\leq$ siendo antisimétrica, se deduce $x = y$.
Se concluye que Ψ es relación de orden.

(ii) Indique si es una relación de orden parcial o total. Justifique.
Solución: es una relación de orden parcial. En efecto, $\frac{1}{2} - 0 \notin \mathbb{N}, 0 - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, entonces $0 \not\Psi \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} \not\Psi 0$.

2. Considere ahora la relación Φ definida en $\mathbb{R}$ por $x \,\Phi\, y \;\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$.

(i) Demuestre que Φ es una relación de equivalencia.
Solución: se muestra como antes que Φ es refleja y transitiva.
Simétrica: sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x\Phi y$, esto es, $y - x \in \mathbb{Z}$.
Vemos que $x - y = -(y - x) \in \mathbb{Z}$ dado que es el inverso de un entero, y se tiene $y\Phi x$.
Entonces Φ es una relación de equivalencia.

(ii) Dado $p \in \mathbb{Z}$, calcule la clase de equivalencia $[p]_\Phi$.
Solución: sea $x \in \mathbb{R}$.
$p\Phi x \Leftrightarrow x - p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$, dado que $p \in \mathbb{Z}$.
Entonces $[p]_\Phi = \mathbb{Z}$.

P3 (Control 2 - años 1998, 2011)

1. Probar por inducción que $\forall\, m \geq 0, \quad 5^{2m+1} + 7^{2m+1}$, es divisible por 6.

Solución: Llamemos $p(m)$ a la proposición $(\exists k \in \mathbb{N}, 5^{2m+1} + 7^{2m+1} = 6k)$ y demostremos por inducción que esta proposición vale para todo $m \in \mathbb{N}$.
Caso base ($m_0 = 0$): $5^{2\times 0+1} + 7^{2\times 0+1} = 5 + 7 = 12 = 6 \times 2$, entonces $p(0)$ es cierta.
Paso inductivo: sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $p(m)$ sea cierta, es decir que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $5^{2m+1} + 7^{2m+1} = 6k$.
Probemos $p(m+1)$.

$$
\begin{aligned}
& 5^{2(m+1)+1} + 7^{2(m+1)+1} \\
= \;& 5^{2m+3} + 7^{2m+3} \\
= \;& 25 \times 5^{2m+1} + 49 \times 7^{2m+1} \\
= \;& 25 \times 5^{2m+1} + (25 + 24) \times 7^{2m+1} \\
= \;& 25(5^{2m+1} + 7^{2m+1}) + 24 \times 7^{2m+1} \\
= \;& 25 \times 6k + 6 \times 4 \times 7^{2m+1} \\
= \;& 6(25k + 4 \times 7^{2m+1})
\end{aligned}
$$

Entonces $p(m+1)$ es cierta, luego por inducción, $p(m)$ vale para todo $m \in \mathbb{N}$.

2. Demostrar por inducción que, $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n+1)(2n+1)$.

Solución: Llamemos $p(n)$ a la proposición $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n+1)(2n+1)\right)$. Demostremos por inducción que $p(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.
Caso base ($n_0 = 0$): Se tiene $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{1-1} 1^2 = 1 = (0+1)(2 \times 0 + 1)$ y $p(0)$ es cierta.
Paso inductivo: sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $p(n)$ sea cierta, es decir, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n+1)(2n+1)$.

- Por un lado,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{2(n+1)+1} (-1)^{k-1}k^2 \\
= & \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^{k-1}k^2 \\
= & \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^{2n+2-1}(2n+2)^2 + (-1)^{2n+3-1}(2n+3)^2 \\
= & (n+1)(2n+1) + (-1)^{2n+1}(2n+2)^2 + (-1)^{2n+2}(2n+3)^2 && \text{por hipótesis inductiva} \\
= & (n+1)(2n+1) - (2n+2)^2 + (2n+3)^2 && \text{pues } 2n+1 \text{ es impar y } 2n+2 \text{ es par} \\
= & 2n^2 + n + 2n + 1 - 4n^2 - 8n - 4 + 4n^2 + 12n + 9 \\
= & 2n^2 + 7n + 6
\end{aligned}$$

- Por otro lado, $(n+1+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$.

Hay igualdad entre los dos, entonces $p(n+1)$ es cierta, y se concluye que por inducción, $p(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

P4

Consideremos la función $f : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ f(n/2) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

1. Calcular $f(1), f(2), f(3), f(4)$ y $f(6)$.

   Solución: la definición de esta función es un poco rara, siendo parecida a una definicion por recurrencia por los números pares, y "normal" por los impares. De hecho, lo que hace la función f es dividir n por 2 hasta que n resulte ser impar. Verifiquemos eso sobre unos ejemplos:

   - 1 es impar entonces $f(1) = 1$.
   - 2 es par, entonces $f(2) = f(2/2) = f(1) = 1$.
   - 3 es impar, entonces $f(3) = 3$.
   - 4 es par, entonces $f(4) = f(4/2) = f(2) = 1$.
   - 6 es par, entonces $f(6) = f(6/2) = f(3) = 3$.

2. Ahora definamos en $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ por : $n_1\mathcal{R}n_2 \Leftrightarrow f(n_1) = f(n_2)$.

   a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
   Solución:
   Refleja: sea $n \in \mathbb{N}$. Obviamente se tiene $f(n) = f(n)$, entonces $n\mathcal{R}n$.
   Transitiva: sean $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tales que $n_1\mathcal{R}n_2$ y $n_2\mathcal{R}n_3$. Se tiene $f(n_1) = f(n_2)$ y $f(n_2) = f(n_3)$, luego $f(n_1) = f(n_3)$ y $n_1\mathcal{R}n_3$.
   Simétrica: sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n_1\mathcal{R}n_2$. Entonces $f(n_1) = f(n_2)$, luego $f(n_2) = f(n_1)$ y $n_2\mathcal{R}n_1$.

   b) Describir el conjunto cuociente $(\mathbb{N}\backslash\{0\})/\mathcal{R}$.
   Solución:

   - Si tomamos $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1 \neq n_2$ y n_1, n_2 impares, entonces $f(n_1) = n_1 \neq n_2 = f(n_2)$, es decir que $n_1 \not{\mathcal{R}} n_2$, y las clases de equivalencia de los impares son disjuntas.
   - Si $n \in \mathbb{N}$ es par, sea $k = f(n)$. Por definición, k es impar, luego se tiene $f(n) = k = f(k)$, y eso implica que $k\mathcal{R}n$.

   Entonces, las clases de equivalencia de los impares son disjuntas, y todo número par pertenece a la clase de equivalencia de algún impar. Se concluye que $(\mathbb{N}\backslash\{0\})/\mathcal{R} = \{[1], [3], [5], \cdots\} = \{[2k+1], k \in \mathbb{N}\}$.