MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 24 de Abril 2014

Auxiliar 6 - Principio de Inducción

P1 (Control 2, año 1997)

Dado $n \in \mathbb{N}$, se define su *factorial* por:

$$0! = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!$$

1. Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
2. Demostrar que, pada todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

P2 (Control 3, años 2000 y 2011)

1. Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}, 3^n + 4^n - 1$ es divisible por 3.
2. Demostrar que el producto de tres números naturales consecutivos es divisible por 6.

P3

Consideremos la sucesión definida por

$$u_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.

Hint: Se puede ocupar la proposición siguiente, que se demostró en clase:

$$\forall q > 0, q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

P4 (Control 3, año 2009)

Se define por recurrencia la colección de reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$a_1 = 2$$
$$a_{n+1} = \frac{12}{1 + a_n}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Demuestre por inducción que

1. $a_{2n-1} < a_{2n+1}, \quad \forall\, n \geq 1.$
2. $a_{2n} > 3, \quad \forall\, n \geq 1.$

P5

Probar la proposición siguiente:

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

P6

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectivas tales que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$.