MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 11 de Abril 2014

Trabajo dirigido 1

Preliminar - ¿Como empezar a resolver un problema?

La mayoría de los problemas que van a encontrar en sus ramos de matemáticas consistirán en hacer demostraciones bajo algunas hipótesis. Si bien dos demostrationes pueden ser muy diferentes, casi siempre siguen el mismo esquema. Así, para no quedar pegados frente a una pregunta sin saber como empezar, les recomiendo que se acuerden de las siguientes étapas. La idea general es cortar la demostracion en pedazos «más chicos» y más fáciles de probar, antes de ocupar las hipótesis. Aquí, seguiremos el ejemplo de la P1.1 de este TD.

1. Tener bien claro qué hay que demostrar, y bajo qué hipótesis.
2. - Si la proposición que hay que demostrar es una implicancia, tomar la proposición de izquierda como hipótesis. Si es una equivalencia, puede servir «cortarla» en dos implicancias.
   - Si la proposición empieza por $\forall$, escoger un elemento cualquiera y demostrar que cumple el resto de la proposición.
   - Si empieza por $\exists$, buscar (en el borrador) un elemento que satisfaga el resto de la proposición, luego demostrar (en la hoja) que satisface la proposición.
3. Si todavía hay implicancias o cuantificadores en lo que hay que demostrar, repetir la étapa 2. Si no, escribir precisamente la definición de lo que se quiere demostrar.
4. Repetir las étapas 2 y 3 hasta que no se pueda, y solo entonces, ocupar las hipótesis y propriedades del curso para concluir la demostración.

Ejemplo: *Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $p \circ p = p$. Demostrar que si p es es inyectiva, entonces $p = Id_E$.*

Primero, aclaro cuales son las hipótesis y qué hay que probar.
HIPÓTESIS: $p : E \to E$, $p \circ p = p$.
HAY QUE DEMOSTRAR: p inyectiva $\Rightarrow (p = Id_E)$.

Tengo una implicancia: entonces puedo tomar el lado izquierdo como hipótesis, y tratar de probar el lado derecho. Y ahora nos encontramos con:
HIPÓTESIS: $p : E \to E$, $p \circ p = p$ y p inyectiva.
HAY QUE DEMOSTRAR: $p = Id_E$.

Ahora, escribo la definición de lo que tengo que probar. Vimos en clase que eso significa que hay que probar lo siguiente:

(i). $\mathrm{Dom}(p) = \mathrm{Dom}(Id_E)$

(ii). $\mathrm{Rec}(p) = \mathrm{Rec}(Id_E)$

(iii). $\forall x \in \mathrm{Dom}(p), p(x) = Id_E(x)$.

Vamos probando estas tres cosas.

(i). Aquí, no se puede repetir las étapas 2 y 3, así que hay que terminar la demostración con las hipótesis. Sabemos, por definición de p, que $\mathrm{Dom}(p) = E$. Pero vimos que también $\mathrm{Dom}(Id_E) = E$. Entonces concluimos que $\mathrm{Dom}(p) = \mathrm{Dom}(Id_E)$.

(ii). De la misma manera, sabemos por hipótesis que $\mathrm{Rec}(p) = E$, y sabemos del curso que $\mathrm{Rec}(Id_E) = E$, con lo que concluimos que $\mathrm{Rec}(p) = \mathrm{Rec}(Id_E)$.

(iii). La tercera proposición que hay que probar empieza con $\forall x \in E$. Escribimos entonces «Sea $x \in E$», y nos encontramos con:
Hipótesis: $p : E \to E, p \circ p = p, p$ inyectiva y $x \in E$.
Hay que probar: $p(x) = Id_E(x)$.

Ahora, no se puede repetir 2 y 3, así que ocupamos las hipótesis.
Primero, sabemos que $p \circ p = p$, con lo que podemos escribir $p(x) = p(p(x))$.
Luego, sabemos que p es inyectiva, es decir: $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(p) = E, (p(x_1) = p(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$. Podemos aplicar está hipótesis a $x_1 = x$ y $x_2 = p(x)$: en efecto, $p(x_1) = p(x) = p(p(x)) = p(x_2)$. De eso deducimos que $x_1 = x_2$, esto es, $p(x) = x = Id_E(x)$ por definición de Id_E.
¡Y con esto terminamos la demostración!

Noten que esta demostración tiene voluntariamente demasiado detalles. Para saber más o menos cuantos detalles hay que dar en un control, vean la pauta más abajo.

P1

Sea E un conjunto no vacío, sea $p : E \to E$ tal que $p \circ p = p$.

1. Demostrar que si p es inyectiva, entonces $p = Id_E$.
2. Demostrar que si p es sobreyectiva, entonces $p = Id_E$.

P2 (Control 2, año 2012)

Sean A, B, C, D cuatro conjuntos tales que $A \cap C = \varnothing$ y $B \cap D = \varnothing$. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define la función $h : A \cup C \to B \cup D$ por

$$\forall x \in A \cup C, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in C \end{cases}$$

1. Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva.
2. Demuestre que si f, g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva.
3. Si f, g son biyectivas, demuestre que h es biyectiva y encuentre su inversa. Justifique su respuesta.

P3

Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por : $f(x, z) = x + z$.

1. Verifique si f es inyectiva o sobreyectiva. Justifique con una demostración.
2. Demuestre que $f(\mathbb{Z} \times \{0\}) = \mathbb{Z}$.
3. Denotamos $P = \{x \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\}$ el conjunto de los enteros pares, y $Q = \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k + 1\}$ el conjunto de los impares. Determine $f(P \times Q)$ y $f^{-1}(P)$.

P4

Sean E, F dos conjuntos, sean $A \subseteq E, B \subseteq F$. Sea $f : E \to F$ una función. Demostrar que:

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

P5 (Control 2, año 2009)

Sea $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \mid f \text{ es función}\}$ y $\beta = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Se definen las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rl} \psi : \mathcal{F} & \longrightarrow [0,1] \\ f & \longmapsto \psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rl} I : \beta & \longrightarrow \beta \\ f & \longmapsto I(f) = f^{-1} \end{array}$$

1. Demuestre que ψ está bien definido, es decir, verifique que $(\forall\, f \in \mathcal{F})\ \psi(f) \in [0,1]$.
2. Estudie la inyectividad y sobreyectividad de ψ.
3. Pruebe que $I(f \circ g) = I(g) \circ I(f)$.
4. Demuestre que $(\psi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.

Pauta - Trabajo dirigido 1

P1

Sea E un conjunto no vacío, sea $p : E \to E$ tal que $p \circ p = p$.

1. Demostrar que si p es inyectiva, entonces $p = Id_E$.

   Solución: supongamos que p es inyectiva. Sabemos que $\mathrm{Dom}(p) = E = \mathrm{Dom}(Id_E)$, y $\mathrm{Rec}(p) = E = \mathrm{Rec}(Id_E)$. Sea $x \in E$. Por hipótesis, se tiene $p(x) = p(p(x))$. Denotando $x_1 = x$ y $x_2 = p(x)$, se tiene $p(x_1) = p(x_2)$, luego por inyectividad de p, $x_1 = x_2$, esto es, $p(x) = x = Id_E(x)$. Con esto demostramos que $\forall x \in E,\ p(x) = x = Id_E(x)$. Conclusión: p e Id_E tienen mismo dominio, mismo recorrido y misma definición, entonces son iguales.

2. Demostrar que si p es sobreyectiva, entonces $p = Id_E$.

   Solución: supongamos que p es sobreyectiva. Sea $y \in E$. Por sobreyectividad de p, existe $x \in E$ tal que $y = p(x)$. Pero por hipótesis, se tiene $p(x) = p(p(x))$. Notando que $y = p(x)$, se tiene entonces $y = p(x) = p(p(x)) = p(y)$. Eso demuestra que $\forall y \in E, p(y) = y = Id_E(y)$. Y como p e Id_E también tienen mismo dominio y recorrido (como antes), son iguales.

P2 (Control 2, año 2012)

Sean A, B, C, D cuatro conjuntos tales que $A \cap C = \varnothing$ y $B \cap D = \varnothing$. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define la función $h : A \cup C \to B \cup D$ por

$$\forall x \in A \cup C, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in C \end{cases}$$

1. Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva.

   Solución: supongamos $f,\ g$ inyectivas. Sean $x_1, x_2 \in A \cup C$ tales que $h(x_1) = h(x_2)$.

   - Si $x_1 \in A$ y $x_2 \in A$, entonces $f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = f(x_2)$, entonces por inyectividad de f, $x_1 = x_2$.
   - Si $x_1 \in C$ y $x_2 \in C$, como antes $g(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = g(x_2)$ y por inyectividad de g, $x_1 = x_2$.
   - Falta el caso $x_1 \in A, x_2 \in C$ (o al revés). Veamos que bajo el hipótesis $h(x_1) = h(x_2)$, este caso es imposible. En efecto, si $x_1 \in A, h(x_1) = f(x_1) \in B$. Y si $x_2 \in C, h(x_2) = g(x_2) \in D$. Como $B \cap D = \varnothing$, no se puede tener $h(x_1) = h(x_2)$ (pues si se tuviera eso, se tendría $h(x_1) = h(x_2) \in B \cap D$, contradicción).

2. Demuestre que si f, g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva.

   Solución: supongamos $f,\ g$ sobreyectivas. Sea $y \in B \cup D$.

   - Si $y \in B$, por sobreyectividad de f existe $x \in A$ tal que $y = f(x) = h(x)$.
   - Si $y \in D$, por sobreyectivdad de g existe $x \in C$ tal que $y = g(x) = h(x)$.

   En ambos casos, existe $x \in A \cup C$ tal que $y = h(x)$, lo que permite concluir que h es sobreyectiva.

3. Si f, g son biyectivas, demuestre que h es biyectiva y encuentre su inversa.
   Justifique su respuesta.

   Solución: supongamos $f,\ g$ biyectivas. Por lo anterior, eso implica que h es inyectiva y sobreyectiva, entonces h es biyectiva. Entonces existe $h^{-1} : B \cup D \to A \cup C$ definida por: $\forall x \in A \cup C, y \in B \cup D, h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$.
   Sea $y \in B \cup D$.

   - Por lo anterior, sabemos que si $y \in B$, entonces $f^{-1}(y) \in A$ y $h(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$.
     Entonces $f^{-1}(y) = h^{-1}(y)$.
   - De la misma manera, si $y \in D$, entonces $g^{-1}(y) \in C$ y $h(g^{-1}(y)) = g(g^{-1}(y)) = y$. Entonces $g^{-1}(y) = h^{-1}(y)$.

   Eso permite concluir que h^{-1} está dada por :

$$\forall y \in B \cup D, h^{-1}(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{si} \quad y \in B \\ g^{-1}(y) & \text{si} \quad y \in D \end{cases}$$

P3

Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por : $f(x, z) = x + z$.

1. Verifique si f es inyectiva o sobreyectiva. Justifique con una demostración.

   Solución:

   - Mostremos que f no es inyectiva, es decir, $\exists (x_1, x_2), (x_1', x_2') \in \mathbb{Z}^2, (f(x_1, x_2) = f(x_1', x_2')) \wedge ((x_1, x_2) \neq (x_1', x_2'))$. En efecto, $(0, 1) \in \mathbb{Z}^2, (1, 0) \in \mathbb{Z}^2$, $f(0, 1) = 1 = f(1, 0)$ pero $(0, 1) \neq (1, 0)$, y f no es inyectiva.
   - Mostremos que f es sobreyectiva, es decir, $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2, y = f(x_1, x_2)$. En efecto, sea $y \in \mathbb{Z}$, sean $x_1 = 0, x_2 = y$. Se tiene $f(x_1, x_2) = f(0, y) = 0 + y = y$. Eso demuestra que f es sobreyectiva.

2. Demuestre que $f(\mathbb{Z} \times \{0\}) = \mathbb{Z}$.

   Solución : Recordemos que $f(\mathbb{Z} \times \{0\}) = \{y \in \mathbb{Z} = \text{Rec}(f) | \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \{0\}, y = f(x_1, x_2)\}$ es el conjunto de las imágenes por f de los elementos de $\mathbb{Z} \times \{0\}$. Demostraremos esto por doble inclusión.
   $\boxed{\subseteq}$: Sea $y \in f(\mathbb{Z} \times 0)$. Entonces existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$ tal que $y = f(x_1, x_2)$. Necesariamente, se tiene $x_2 = 0$. Así, $y = f(x_1, 0) = x_1 + 0 = x_1 \in \mathbb{Z}$, y se tiene la primera inclusión.
   $\boxed{\supseteq}$: Sea $y \in \mathbb{Z}$. Se tiene $y = y + 0 = f(y, 0)$ y $(y, 0) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$. Así, tomando $x_1 = y, x_2 = 0$, se tiene $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$ e $y = f(x_1, x_2) \in f(\mathbb{Z} \times \{0\})$, lo que demuestra la inclusión reciproca.

3. Denotamos $P = \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ el conjunto de los enteros pares, y $Q = \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1\}$ el conjunto de los impares. Determine $f(P \times Q)$ y $f^{-1}(P)$.

   Solución:

   - Demostraremos primero que $f(P \times Q) = Q$, por doble inclusión.
     $\boxed{\subseteq}$: sea $y \in f(P \times Q)$. Entonces existe $(x_1, x_2) \in P \times Q$ tal que $f(x_1, x_2) = y$. Pero por definición, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $x_1 = 2k_1$ y $x_2 = 2k_2 + 1$. Luego, $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2) + 1$ con $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, entonces $y \in Q$.
     $\boxed{\supseteq}$: sea $y \in Q$. Por definición de Q, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $y = 2k + 1$.
     Además, se tiene $2k \in P, 1 \in Q$ y $f(2k, 1) = 2k + 1 = y$, lo que demuestra que $y \in f(P \times Q)$.
   - Ahora demostremos que $f^{-1}(P) = (P \times P) \cup (Q \times Q)$, por doble inclusión.
     Recordemos que $f^{-1}(P) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \text{Dom}(f) | f(x_1, x_2) \in P\}$ es el conjunto de los elementos del dominio cuya imagen está en P.
     $\boxed{\subseteq}$: sea $(x_1, x_2) \in f^{-1}(P)$, eso significa que $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \in P$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 + x_2 = 2k$.
     - Si $x_1 \in P$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 = 2k_1$.
       Luego, vemos que $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 = 2k - 2k_1 = 2(k - k_1)$. Y se tiene $(k - k_1) \in \mathbb{Z}$, y entonces $x_2 \in P$, y por lo tanto $(x_1, x_2) \in P \times P$.
     - Si $x_1 \in Q$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 = 2k_1 + 1$.
       Luego, vemos que $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 = 2k - (2k_1 + 1) = 2k - 2k_1 - 1 = 2(k - k_1 - 1) + 1$. Y se tiene $(k - k_1 - 1) \in \mathbb{Z}$, con lo que se concluye que $x_2 \in Q$, y por lo tanto $(x_1, x_2) \in Q \times Q$.

     $\boxed{\supseteq}$: Sea $(x_1, x_2) \in (P \times P) \cup (Q \times Q)$.
     - Si $(x_1, x_2) \in P \times P$, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $x_1 = 2k_1, x_2 = 2k_2$.
       Luego, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$ con $(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$. Se tiene $f(x_1, x_2) \in P$, es decir, $(x_1, x_2) \in f^{-1}(P)$.
     - Si $(x_1, x_2) \in Q \times Q$, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $x_1 = 2k_1 + 1, x_2 = 2k_2 + 1$.
       Luego, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2 + 1)$ con $(k_1 + k_2 + 1) \in \mathbb{Z}$. Se tiene $f(x_1, x_2) \in P$, es decir, $(x_1, x_2) \in f^{-1}(P)$.

P4

Sean E, F dos conjuntos, sean $A \subseteq E, B \subseteq F$. Sea $f : E \to F$ una función. Demostrar que:

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

Solución : por doble inclusión.
$\boxed{\subseteq}$: Sea $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$. Entonces existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tal que $y = f(x)$. Así, como $x \in A$, se tiene $y \in f(A)$. Y como $x \in f^{-1}(B), y = f(x) \in B$: eso muestra que $y \in f(A) \cap B$.
$\boxed{\subseteq}$: Sea $y \in f(A) \cap B$. Como $y \in f(A)$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Y $f(x) = y \in B$, lo que significa que $x \in f^{-1}(B)$. Entonces $x \in A \cap f^{-1}(B)$, e $y \in f(A \cap f^{-1}(B)$.

P5 (Control 2, año 2009)

Sea $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \mid f \text{ es función}\}$ y $\beta = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \mid f \text{ es biyectiva}\}$.
Se definen las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rl} \psi : \mathcal{F} & \longrightarrow [0,1] \\ f & \longmapsto \psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rl} I : \beta & \longrightarrow \beta \\ f & \longmapsto I(f) = f^{-1} \end{array}$$

1. Demuestre que ψ está bien definido, es decir, verifique que $(\forall\, f \in \mathcal{F})\ \psi(f) \in [0,1]$.

   Solución : Sea $f \in \mathcal{F}$. Como el recorrido de f es $[0,1]$, se tiene $0 \le f(0) \le 1$ y $0 \le f(1) \le 1$. Sumando las dos desigualdades, sale $0 \le f(0) + f(1) \le 2$, y luego $0 \le \frac{f(0)+f(1)}{2} = \psi(f) \le 1$.

2. Estudie la inyectividad y sobreyectividad de ψ.

   Solución :

   - Veamos que ψ no es inyectiva, es decir que $\exists f_1, f_2 \in \mathcal{F}, f_1 \neq f_2 \wedge \psi(f_1) = \psi(f_2)$. Definimos $f_1, f_2 : [0,1] \to [0,1]$ por $\forall x \in [0,1], f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$. Se tiene $\psi(f_1) = \frac{0+1}{2} = \frac{0^2+1^2}{2} = \psi(f_2)$, pero $f_1 \neq f_2$ dado que, por ejemplo, $f_1(1/2) = 1/2 \neq 1/4 = f_2(1/2)$.
   - Veamos ahora que ψ es sobreyectiva. Sea $y \in [0,1]$. Sea $f \in \mathcal{F}$ definida por $\forall x \in [0,1], f(x) = y$. Ahora, $\psi(f) = \frac{y+y}{2} = y$. y tiene pre-imagen por ψ, entonces ψ es sobreyectiva.

3. Pruebe que $I(f \circ g) = I(g) \circ I(f)$.

   Solución : Sean $f, g \in \beta$. Entonces $f : [0,1] \to [0,1]$ y $g : [0,1] \to [0,1]$ son biyectivas, luego por prop 4.1 del apunte (p46), $I(f \circ g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = I(g) \circ I(f)$.

4. Demuestre que $(\psi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.

   Solución: Notamos primero que como $\beta \subseteq \mathcal{F}, \psi \circ I : \beta \to [0,1]$. Por contradicción, supongamos entonces que exista $f \in \beta$ tal que $\psi \circ I(f) \in \{0\}$, o sea, $\psi(I(f)) = \psi(f^{-1}) = \frac{f^{-1}(0)+f^{-1}(1)}{2} = 0$, lo que implica $f^{-1}(0) + f^{-1}(1) = 0$.
   Como $f : [0,1] \to [0,1]$ es biyectiva, entonces $f^{-1}[0,1] \to [0,1]$ también lo es. Como $f^{-1}(0) \ge 0, f^{-1}(1) \ge 0$, por lo anterior necesariamente se tiene $f^{-1}(0) = f^{-1}(1) = 0$ (si uno de los dos no fuera nulo, digamos $f^{-1}(0)$ por ejemplo, se tendría $f^{-1}(1) = -f^{-1}(0) \notin [0,1]$, contradicción).
   Entonces se tiene $f^{-1}(0) = f^{-1}(1)$ pero $0 \neq 1$, entonces f^{-1} no es inyectiva, contradicción. No puede existir $f \in (\psi \circ I)^{-1}(\{0\})$, es decir $(\psi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.

¡Suerte para mañana!