MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 27 de Marzo 2014

Auxiliar Extra C1: Lógica - Conjuntos

Lógica

P1. Cuantificando sobre conjuntos

- **Preliminares**
  Verificar que se tienen las siguientes equivalencias:

  (i) $\overline{(\forall\, x \in A)\; p(x)} \iff (\exists\, x \in A)\; \overline{p(x)}$ (ii) $\overline{(\exists\, x \in A)\; p(x)} \iff (\forall\, x \in A)\; \overline{p(x)}$

- **(P1 (b) Control 1, Año 2008)**
  Considere las proposiciones siguientes:

$$p : (\exists\, x \in \mathbb{R})\, (\forall\, y \in \mathbb{R})\; (x \leq y)$$
$$q : (\forall\, y \in \mathbb{R})\, (\exists\, x \in \mathbb{R})\; (x \leq y)$$

  Indique el valor de verdad de cada una de ellas justificando su respuesta. Finalmente escriba sus negaciones.

Conjuntos

P2. Álgebra de Conjuntos

a) **(P1(a) Control 2, Año 2007)**
Sean A, B y C conjuntos, subconjuntos de un universo $\mathcal{U}$. Pruebe que

$$(A \cap B) \subseteq C \implies (A \cap C^c) \subseteq B^c.$$

b) (**P1 (ii) Control 1, Año 1996**)
Sean A, B, C conjuntos. Probar que $A \subseteq C \Longrightarrow A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$.

c) (**P2 (i) Control 1, Año 1997**)
Sean $A, B, C \subseteq U$. Probar que

$$A \cap B \cap C = \phi \Longrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \cup B \cup C$$

P3. Diferencia Simétrica

(i) **(P2 (a) Control 1, Año 1998)**
Probar que para todo A, B, C conjuntos se tiene

(a.1) $A \triangle B = A \triangle C \Longrightarrow B = C$ (a.2) $A \triangle B = C \Longrightarrow B = A \triangle C$

(ii) **(P2 (i) Control 1, 2001)**
(i.1) $(A \triangle B) \cup (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$
(i.2) $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

(iii) **(P2 (a) Control 1, Año 2008)**
Sea A un subconjunto **fijo** del conjunto universo U. Probar que $\forall\, X, Y \subseteq U$ se tiene que

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \Longrightarrow X = Y$$

P4. Conjunto Potencia
(P1 (b) Control 2, Año 2007)
Dados A y B conjuntos, demuestre que

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \iff (A \subseteq B \vee B \subseteq A).$$

P5. Definiciones "Random"

(i) **(P3 Control 1, Año 2009)**
Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universo. Considere dos conjuntos $A, B \subseteq \mathcal{U}$ con $A \neq \phi$.
Para cualquier conjunto $X \subseteq \mathcal{U}$ se define un nuevo conjunto $C(X)$ de la siguiente forma:

$$C(X) = \begin{cases} X \setminus B & \text{si } A \cap X \neq \phi \\ X \cup B & \text{si } A \cap B = \phi \end{cases}$$

(a) Pruebe que $C(B) \in \{\phi, B\}$.
(b) Pruebe que $C(A) = A \setminus B$ y $C(A^c) = (C(A))^c$.
(c) Pruebe que si $(X \cap Y) \cap A \neq \phi \Longrightarrow C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$.

(ii) **(P2 (b) Control 1, Año 2008)**
Sea $A \subseteq U$, $A \neq \phi$. Se define $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{P}(U)$ por

$$X \in \mathcal{F}_A \ \text{ si y solo si } \ X \subseteq U \wedge X \cap A \neq \phi.$$

Demuestre que dado $B \subseteq U$

(1) $U \in \mathcal{F}_A$ y $A \in \mathcal{F}_A$.
(2) Si $A \setminus B \neq \phi \Longrightarrow B^c \in \mathcal{F}_A$
(3) Si $B \in \mathcal{F}_A \wedge C \subseteq U \Longrightarrow (B \cup C) \in \mathcal{F}_A$

Propuesto

Sea F un conjunto de personas que se encuentran esperando en la fila de un banco para ser atendidas. Para x, $y \in F$ se define la función proposicional:
$\phi(x, y)$: "La persona x está más adelante que la persona y en la fila".
Sea $p \in F$ una persona de la fila. Indicar, justificando sus respuestas, la(s) posicion(es) de dicha persona en la fila para cada una de las siguientes proposiciones cuantificadas:

(i) $(\forall\, x \in F)\ [\phi(p, x)\ \vee\ x = p]$
(ii) $(\forall\, x \in F)\ [\phi(x, p)\ \vee\ x = p]$
(iii) $(\exists!\, x \in F)\ [\phi(x, p)\ \veebar\ \phi(p, x)]$
(iv) $(\exists!\, x \in F)\ [\phi(x, p)\ \veebar\ x = p]$
(v) $(\exists!\, x \in F)\ [x = p\ \veebar\ \phi(p, x)]$

Indicación: Para dos proposiciones r, s el conectivo $\veebar$ (o exclusivo) está definido por $r \veebar s \Leftrightarrow (r \vee s) \wedge \sim (r \wedge s)$.