Pauta Clase Auxiliar 01 Intro. al Cálculo.
24 de Marzo 2014

P1

a) Aquí lo que hay que probar es que $(y^{-1}x^{-1})$ es el inverso (~~aditi~~) multiplicativo de xy. Entonces:

PDQ $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = 1$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(xy)(y^{-1}x^{-1}) &= [(xy)\cdot y^{-1}]\, x^{-1} && \text{(Asociatividad)}\\
&= [x(yy^{-1})]\, x^{-1} && \text{(Asociatividad)}\\
&= [x\cdot 1]\, x^{-1} && \text{(Inv. multip.)}\\
&= x x^{-1} && \text{(Neutro multip.)}\\
&= 1 && \text{(Inv. mult)}
\end{aligned}$$

Entonces $(y^{-1}x^{-1})$ es inverso de (xy) como es único, entonces

$$(y^{-1}x^{-1}) = (xy)^{-1}$$

■

b) Partamos del lado derecho de la igualdad a probar:

$$(ad+cb)(bd)^{-1} = (ad+cb)(d^{-1}b^{-1})$$

(como bd es distinto de 0, ~~q~~ aplicamos lo probado en (a))

$$
\begin{aligned}
&= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(d^{-1}b^{-1}) && \text{(Distrib.)}\\
&= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(Conmut.)}\\
&= [(ad)d^{-1}]b^{-1} + [(cb)b^{-1}]d^{-1} && \text{(Asoc. 2 veces)}\\
&= [a(dd^{-1})]b^{-1} + [c(bb^{-1})]d^{-1} && \text{(Asoc. 2 veces)}\\
&= [a\cdot 1]b^{-1} + [c\cdot 1]d^{-1} && \text{(Inv. 2 veces)}\\
&= ab^{-1} + cd^{-1} && \text{(Neutro m. 2 veces)}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

c) Para ello, basta con sumar y ver que el resultado es 0:

$$
\begin{aligned}
(x+y)+[(-x)+(-y)] &= [(x+y)+(-x)]+(-y) && \text{(Asoc.)}\\
&= [x+(y+(-x))]+(-y) && \text{(Asoc.)}\\
&= [x+((-x)+y)]+(-y) && \text{(Conmut.)}\\
&= [(x+(-x))+y]+(-y) && \text{(Asoc.)}\\
&= [0+y]+(-y) && \text{(Inv. Ad.)}\\
&= [y+0]+(-y) && \text{(Conmutativo)}\\
&= y+(-y) && \text{(Neut. Ad.)}\\
&= 0 && \text{(Inv. Ad)}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

d) Partamos del lado izquierdo:

$$
\begin{aligned}
[(a+b)d]+[-((c+d)b)] &= [ad+bd]+[-(cb+db)] && \text{(Dist. 2 veces)}\\
&= [ad+bd]+[(-(cb))+(-(db))] && \text{(por parte (c))}
\end{aligned}
$$

$= [[ad+bd]+(-(cb))]+(-(db))$ (Asoc.)

$= [ad+[bd+(-(cb))]]+(-(db))$ (Asoc.)

$= [ad+[(-(cb))+bd]]+(-(db))$ (Conmut.)

$= [[ad+(-(cb))]+bd]+(-(db))$ (Asoc.)

$= [0+bd]+(-(db))$ (Por enunciado)

$= [bd+0]+(-(db))$ (Conmut.)

$= bd+(-(db))$ (Neutro Aditivo)

$= bd+(-(bd))$ (Conmut.)

$= 0$ (Inverso Aditivo) ■

P2 a)

a.1) Sabemos que

$$0 \leq (x-y)^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq x^2 - 2xy + y^2$$

$$\Rightarrow \quad 2xy \leq x^2 + y^2$$

■

a2) De (a1), tomando $y = 1$,

$$2x \leq 1 + x^2 \qquad \blacksquare$$

a3) De (a2) sabemos que

$$2x \leq 1 + x^2$$

Como $x > 0$, $x^{-1} > 0$ y luego,

$$2x \cdot x^{-1} \leq x^{-1} + x^2 x^{-1}$$

$$2 \leq x^{-1} + x \qquad \blacksquare$$

a4) De (a1) sabemos que:

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

Como $xy > 0$, $\frac{1}{xy} > 0$ y entonces

$$2 \leq \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \qquad \blacksquare$$

b1) Partamos del lado izquierdo:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$= 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+1+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+1+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$$

$$= 3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)$$

$$\geq 3+2+2+2 \qquad (\text{Por } (a4))$$

$$= 9$$

$\blacksquare$

b2) Tenemos que de (a2),

$$2x \leq 1+x^2 \qquad /+x$$

$$3x \leq 1+x+x^2$$

Luego,

$$(1+x+x^2)(1+y+y^2)(1+z+z^2) \geq 3x\cdot 3y\cdot 3z$$

$$\geq 27xyz$$

$\blacksquare$

b3) Recordemos ~~...~~ la suma de cubos:

$$(x^3+y^3) = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$\geq (x+y)(2xy - xy)$ (De (a1))

$= (x+y)(xy)$

$= x^2y + xy^2$ ■

b4) Aplicando la desigualdad (a1) a y, z, obtenemos:

$2yz \leq y^2 + z^2 \quad / \cdot x$

$2xyz \leq xy^2 + xz^2$ (pues $x > 0$)

■

b5) De (b4) tenemos que

$6xyz \leq (xy^2 + xz^2) + (yx^2 + yz^2) + (zy^2 + zx^2)$

$= (xy^2 + yx^2) + (xz^2 + zx^2) + (yz^2 + zy^2)$

$\leq x^3 + y^3 + x^3 + z^3 + y^3 + z^3$

(Por (b3) aplicado 3 veces)

$= 2(x^3 + y^3 + z^3)$

Y entonces

$6xyz \leq 2(x^3 + y^3 + z^3) \quad / \cdot \frac{1}{2}$

$3xyz \leq x^3 + y^3 + z^3$

P3 $$\left|2x - |x+8|\right| \leq \frac{8}{x-2}$$

En primer lugar, $x \neq 2$ para que no se indetermine la fracción.
Después nos queda que como el valor absoluto es positivo, necesariamente $x > 2$.

Si $x > 2$, entonces

$$x + 8 > 0$$

Y luego $|x+8| = x+8$

Y la inecuación queda:

$$|2x - x - 8| \leq \frac{8}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |x - 8| \leq \frac{8}{x-2}$$

Aquí tenemos dos casos:

i) $\boxed{x \leq 8}$ La ecuación queda

$$8 - x \leq \frac{8}{x-2}$$

Como $(x-2)$ es positivo,

$$(8-x)(x-2) \le 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x - x^2 - 16 + 2x \le 8$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \le x^2 - 10x + 24$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \le (x-4)(x-6)$$

	2	4	6	8
$(x-4)$	$-$	$+$	$+$	
$(x-6)$	$-$	$-$	$+$	
$(x-4)(x-6)$	$+$	$-$	$+$	

Luego, el conjunto solución asociado a este caso es:

$$(2,4] \cup [6,8]$$

ii) $\underline{x > 8}$

$$x - 8 \le \frac{8}{x-2}$$

Como $x>2$,

$$\Leftrightarrow \quad (x-8)(x-2) \le 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 16 \le 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 8 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-5)^2 - 25 + 8 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-5)^2 - 17 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-(5+\sqrt{17}))^2 (x-(5-\sqrt{17}))^2 \le 0$$

	8	$5+\sqrt{17}$
$(x-(5+\sqrt{17}))$	$-$	$+$
$(x-(5-\sqrt{17}))$	$+$	$+$
$(\ )\cdot(\ )$	$-$	$+$

Luego, el conjunto solución para este caso es:

$$(8, 5+\sqrt{17}]$$

Luego, el conjunto solución de la inecuación es la unión de las soluciones (i) y (ii)

$$S = (2,4] \cup [6,8] \cup (8, 5+\sqrt{17}]$$
$$= (2,4] \cup [6, 5+\sqrt{17}]$$

//

P4

$$\left|\frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}\right| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-1)}\right| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{|(x+2)(x-1)|} \leq 2 \qquad \text{Si } x\neq -2,\ x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \leq 2\,|(x+2)(x-1)|$$

Separemos en los casos $(x<-2)$, $(-2<x<1)$, $(1<x)$

Podemos juntar el primer y el tercer caso y tomar

$$(x\in(-\infty,-2)\cup(1,\infty)),\ (x\in(-2,1))$$

i) $\underline{x\in(-\infty,-2)\cup(1,\infty)}$

La inecuación queda

$$(x+2)^2 \leq 2(x+2)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4 \leq 2x^2+2x-4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2-2x-8$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x-4)(x+2)$$

Hagamos la tabla:

		-2	4
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(\ )\cdot(\ )$	$+$	$-$	$+$

Entonces el conjunto solución de este caso se obtiene de intersectar el encontrado, con la restricción del caso.

$$S_1 = \left[(-\infty,-2] \cup [4,+\infty)\right] \cap \left[(-\infty,-2) \cup (1,+\infty)\right]$$
$$= (-\infty,-2) \cup [4,+\infty)$$

ii) $x \in (-2,1)$

La inecuación queda:

$$(x+2)^2 \leq -2(x+2)(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+4x+\cancel{4} \leq -2x^2-2x+\cancel{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x^2+6x \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x(3x+6) \leq 0 \quad / \cdot \tfrac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad x(x+2) \leq 0$$

$-2 \qquad 0$

x	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$x(x+2)$	$+$	$-$	$+$

$\Rightarrow x \in [-2, 0]$

Intersectando con el caso,

$$S_2 = [-2,0] \cap (-2,1)$$
$$= (-2, 0]$$

Uniendo la solución de cada caso, tenemos la solución completa:

$$S = S_1 \cup S_2$$
$$= (-\infty, -2) \cup [4, +\infty) \cup (-2, 0]$$
$$= (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \setminus \{-2\}$$

//