Control 1

P1.

i) (3.0 ptos.) Demuestre, utilizando los axiomas de cuerpo de los reales, la siguiente propiedad, justificando cada paso:

$$(-a)^{-1} = -(a^{-1}), \quad a \neq 0$$

IND: puede usar, si lo requiere, la propiedad $x \cdot 0 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) (3.0 ptos.) Demuestre que, $\forall \alpha, x > 0$

$$\frac{x^2}{\alpha} + 1 - \frac{(x+1)^2}{\alpha+1} \geq 0$$

P2. (6.0 ptos.) Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{||x| - |x-2||}{x^2 - 1} \leq 2$$

Tiempo: 1.15 horas.

Pauta Control 1

P1.

(i) Probar que $(-a)^{-1} = -(a^{-1}), a \neq 0$.
Se sabe que $a + (-a) = 0 / \cdot a^{-1}$ (Existencia inverso $a \neq 0$)
$\Rightarrow (a + (-a))a^{-1} = 0 \cdot a^{-1} = 0$ ($x \cdot 0 = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$)
$\Rightarrow aa^{-1} + (-a)a^{-1} = 0$ (Distributividad)
$\Rightarrow 1 + (-a)a^{-1} = 0$ (Existe neutro para $\cdot$) (1.0 pto.)
$\Rightarrow (-a)^{-1} \cdot 1 + (-a)^{-1}[(-a)a^{-1}] = (-a^{-1}) \cdot 0 = 0$
en que se uso existencia de inverso de $-a \neq 0$, distributividad y propiedad $x \cdot 0 = \forall x \in \mathbb{R}$. (1.0 pto.)
$\Rightarrow (-a)^{-1} + [(-a)^{-1}(-a)] \cdot a^{-1} = 0$ (asociatividad y 1 neutro para $\cdot$)
$\Rightarrow (-a)^{-1} + 1 \cdot a^{-1} = 0$ (1 neutro para $\cdot$)
$\Rightarrow (-a)^{-1} + a^{-1} = 0$.
Asi, cada término es el único opuesto del otro. (1.0 ptos.)
Se concluye que: $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

ii) $\forall \alpha, x > 0\ \ \frac{x^2}{\alpha} + 1 - \frac{(x+1)^2}{\alpha+1} \geq 0$.
En efecto $\frac{x^2}{\alpha} + 1 - \frac{(x+1)^2}{\alpha+1} = \frac{(\alpha+1)^2 + \alpha(\alpha+1) - \alpha(x+1)^2}{\alpha(\alpha+1)}$ (1.0 ptos.)
$\frac{\alpha x^2 + x^2 + \alpha^2 + \alpha - \alpha x^2 - 2\alpha x - \alpha}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{(x-\alpha)^2}{\alpha(\alpha+1)} \geq 0$
donde el numerador es un cuadrado perfecto y el denominador $\alpha(\alpha+1) > 0$ para $\alpha > 0$. (2.0 ptos.)

P2. Resolver $\frac{||x|-|x-2||}{x^2-1} \leq 2$. Es útil observar que $\forall x \in (-1,1)$, $x^2 - 1 < 0$ y el módulo del numerador es positivo, de modo que $(-1,1)$ es inmediatamente parte de la solución $\left(\frac{\geq 0}{< 0} < 2\right)$.
Resta estudiar los casos para $x \leq 1$, $x \in (1,2]$ y $x > 2$
donde 2 es punto crítico (y -1, 1 están excluidos). (2.0 ptos.)

(i) Sea $x \in (-\infty, -1)$, la inecuación queda $\frac{|-x+x-2|}{x^2-1} \leq 2$
$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} \leq 1\ / \cdot (x^2-1) > 0$
$\Rightarrow x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$. Asi, la solución compatible con el intervalo en estudio será $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$. (1.0 ptos.)

(ii) Sea $x \in (1,2]$, la inecuación queda $\frac{|x+x-2|}{x^2-1} \leq 2$
$\Leftrightarrow \frac{2|x-1|}{x^2-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \leq 1$ ($x - 1 \neq 0$)
$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq 1 \Rightarrow x + 1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$ ($x + 1 > 0$) (1.0 ptos.)
y compatible con $(1,2] \Rightarrow x \in (1,2]$ es solución

iii) $x \in (2, \infty)$, la inecuación queda $\frac{|x-(x-2)|}{x^2-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1} \leq 2$
$\Rightarrow \frac{1}{x^2-1} \leq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 1$ ($x^2 - 1 > 0$) $\Rightarrow x^2 \geq 2$ (1.0 ptos.)
$\Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$ que valida todo el intervalo $(2, \infty)$.
La solución total será: $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup (1,1) \cup (1, \infty)$ (1.0 ptos.)