Mecánica del Continuo
Tarea 4 — Entrega 11 de abril de 2014

Profesor: Rodrigo Soto
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

1. **Movimiento sobre un plano inclinado.**

   Considere un fluido viscoso isotérmico que está sobre un plano inclinado en un ángulo α. El fluido se mueve debido a la gravedad, manteniendo una altura constant H. Las condiciones de borde son tales que el fluido no desliza en contacto con el plano y en la superficie libre no hay esfuerzos de corte y la presión se anula. Considere que el fluido llegó al régimen estacionario.

   a) Determine la velocidad del flujo en función de la altura.

   b) Calcule el caudal por unidad de área.

2. **Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas curvilíneas.**

   La ecuación de Navier-Stokes es compleja de utilizar en coordenadas curvilíneas (cilíndricas o esféricas) pues en los términos $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ y $\nabla^2\vec{v}$ se deben calcular las derivadas no sólo de las componentes de la velocidad, sino tambien se deben derivar los vectores unitarios.

   Por eso, es más conveniente usar algunas transformaciones para dejarla en una forma más adecuada para usar los operadores vectoriales usuales.

   Muestre que la ecuación de Navier-Stokes se puede escribir como

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla v^2-\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\right]=-\nabla p+\eta\left[\nabla(\nabla\cdot\vec{v})-\nabla\times(\nabla\times\vec{v})\right]$$

3. **Flujo de Taylor-Couette.**

   Considere un fluido viscoso incompresible e isotermo que está entre dos cilindros concéntricos de largo infinito y radios R_1 y R_2, con $R_1 < R_2$. Los cilindros se hacen giran con velocidad angular constante Ω_1 y Ω_2, respectivamente. No hay gravedad en el problema y el sistema está en el régimen estacionario.

   a) Usando coordenadas cilíndricas, analice de acuerdo a las simetrías del problema, de qué coordenadas dependen la velocidad y la presión y en qué dirección va la velocidad. Muestre que con estas hipótesis, la condición de incompresibilidad se satisface inmediatamente.

   b) Escriba la ecuación de Navier-Stokes usando la expresión de la pregunta anterior. Muestre que esta ecuación vectorial resulta en dos ecuaciones escalares para la presión y velocidad. Resuelva las ecuaciones con las condiciones de borde apropiadas. Para la presión falta una condición de borde, use que $p(r=R_1)=p_0$.

   c) Calcule el tensor de esfuerzos y a partir de él calcule el torque total (por unidad de largo) en cada uno de los cilindros. Muestre que los torques son iguales y opuestos.

   d) Bajo qué condición el torque se anula. Comente.

   Comentario: Uds obtendrán que el torque es proporcional a la viscosidad. Este aparato, entonces, permite medir la viscosidad de un fluido si simultaneamente se miden la velocidad angular y el torque (el que se mide por la potencia eléctrica que se debe inyectar al motor). Es un viscosímetro de Taylor-Couette.