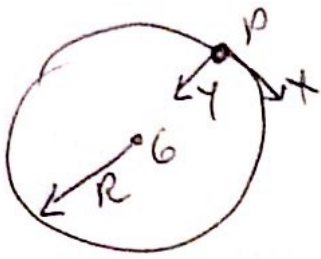


Ejercicio 14

Prof: Patricio Londero
Aux: Sergio Cotroneo



$$\lambda = \frac{M}{2\pi R} \Rightarrow dm = \lambda R d\theta$$

$$\vec{r} = R\vec{e} = R\cos\theta\vec{x} + R\sin\theta\vec{y}$$

$$a) I_G = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} R^2 \sin^2\theta & R^2 \cos\theta \sin\theta & 0 \\ R^2 \cos\theta \sin\theta & R^2 \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} \lambda R d\theta$$

Recordando: $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi$; $\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta = 0$

$$\Rightarrow I_G = MR^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Momento de inercia con respecto a P.

Por Steiner: $I_{is}^P = I_{is}^G + M \left(R_G^2 \delta_{ij} - R_{G,i} R_{G,j} \right)$

$$\Rightarrow MR^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I^P = MR^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Ahora como $\vec{C} = \vec{\ell}$

$$\Rightarrow -Mg \sin \theta R = I_{zz} \ddot{\theta} \quad ; \text{ ya que } \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -R Mg \sin \theta = 2MR^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{2R} \sin \theta$$

de donde claramente $\boxed{\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{g}{2R}}}$

Otra forma

La energía cinética del aro está dada por $K = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{zz}$
mientras que la potencial es $U = -MgR \cos \theta$

$$\Rightarrow \frac{dU}{d\theta} = +MgR \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta_e = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2U}{d\theta^2} = MgR \cos \theta$$

$$\text{Finalmente } \omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{U''(\theta_e)}{I_{zz}}} = \sqrt{\frac{MgR}{2MR^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{g}{2R}}}$$