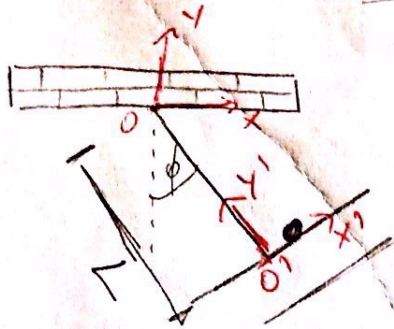


Ejercicio 13

Sergio Latorre A.
Patricio Latorre



Columpio masa M y largo L
Pelota masa m desliza por x' , $m \ll M$

1) Despreciando el efecto de la masa m en el oscilador, se tiene que:

$$\vec{R} = L\vec{e} \quad , \quad \vec{V} = \dot{\vec{R}} = L\dot{\phi}\vec{\phi}$$

$$\vec{A} = \ddot{\vec{R}} = -L\dot{\phi}^2\vec{e} + L\ddot{\phi}\vec{\phi}$$

Tomando $\hat{\phi}$ $M L \ddot{\phi} = - M g \sin \phi$
 $\uparrow$ componente del peso

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi}$$

2) En este caso $\ddot{\vec{R}}$ viene dado por la función ϕ , de lo obtenido en (1), se tiene que:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi \quad / \quad \cdot \phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} \right) = + \frac{g}{L} \frac{d(\cos \phi)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{2g}{L} \cos \phi + C}$$

$$\text{Como en } \dot{\phi} = 0 \quad \phi = \phi_0 \Rightarrow \frac{2g}{L} \cos \phi_0 = -C$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \pm \sqrt{\frac{2g}{L} (\cos \phi - \cos \phi_0)}} = \Omega \Rightarrow \Omega = \dot{\phi} \hat{\phi}$$

3) Es lo ya fue hecho en (1) $\vec{R} = L\vec{e}$ y $\ddot{\vec{R}} = -L\dot{\phi}^2\vec{e} + L\ddot{\phi}\vec{\phi}$

Notamos que en este caso. $\vec{e} = -\hat{j}'$ y $\vec{\phi} = \hat{x}'$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R} = -L\hat{j}' \quad \text{y} \quad \ddot{\vec{R}} = 2g(\cos \phi - \cos \phi_0)\hat{j}' - g \sin \phi \hat{x}'}$$

for lo calculado
en (1) y (2)

4. Nos piden expresar las fuerzas en el sistema S' .
Claramente tenemos que las fuerzas reales son:

$\vec{N} = N \hat{j}'$ que es la normal al columpio.

$$\vec{P} = mg \hat{j} = mg(-\sin \phi \hat{x}' - \cos \phi \hat{z}') = -mg(\sin \phi \hat{x}' + \cos \phi \hat{z}')$$

Ahora, tenemos que para la partícula su posición está dada simplemente por: $\vec{r} = x' \hat{x}' \Rightarrow \vec{v}' = \dot{x}' \hat{x}'$, $\vec{a}' = \ddot{x}' \hat{x}'$

Así las fuerzas ficticias son:

Centrífuga: $-m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -m \dot{\phi}^2 x' \hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{x}') \quad \hat{k} = \hat{k}'$
 $\rightarrow \vec{F}_{centrífuga} = m \dot{\phi}^2 x' \hat{x}'$

Coríolis: $-2m \vec{\omega} \times \vec{v}' = -2m \dot{\phi} \hat{k} \times \dot{x}' \hat{x}' = -2m \dot{x}' \dot{\phi} \hat{z}'$

Transversal: $-m \ddot{\phi} \hat{k} \times \vec{r}' = -m \ddot{\phi} \hat{k} \times x' \hat{x}' = -m x' \ddot{\phi} \hat{z}'$

Finalmente:

$$\vec{F}_{centrífuga} = \frac{2gm}{L} (\cos \phi - \cos \phi_0) x' \hat{x}'$$

$$\vec{F}_{coríolis} = \mp 2m \dot{x}' \sqrt{\frac{2g}{L} (\cos \phi - \cos \phi_0)} \hat{z}'$$

$$\vec{F}_{transversal} = -\frac{mgx'}{L} \sin \phi \hat{z}'$$

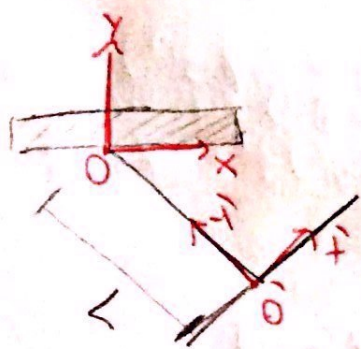
5) Tenemos:

$$m \ddot{x}' \hat{x}' = N \hat{j}' - mg(\sin \phi \hat{x}' + \cos \phi \hat{z}') + \frac{2gm}{L} (\cos \phi - \cos \phi_0) x' \hat{x}' + \mp 2m \dot{x}' \sqrt{\frac{2g}{L} (\cos \phi - \cos \phi_0)} \hat{z}' + \frac{mgx'}{L} \sin \phi \hat{z}' - m \frac{2g}{L} (\cos \phi - \cos \phi_0) \hat{z}' + m g \sin \phi \hat{x}'$$

Así, tomando $\hat{x}'$ se tiene:

$$m \ddot{x}' = -mg \sin \phi + \frac{2gm}{L} (\cos \phi - \cos \phi_0) x' + m g \sin \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{m \ddot{x}' = \frac{2gm}{L} x' (\cos \phi - \cos \phi_0)} \quad \text{Wow!!}$$



Ejercicio 13 (Pauta para pequeños oscilaciones)

Columpio masa M oscula con amplitud ϕ_M
 Mas m desliza sobre el columpio

(1) Calcular ecuación de movimiento:

Por torque, $\vec{\tau} = \vec{L}$

$$\Rightarrow -Mg \sin \theta \cdot L = M \ddot{\phi} L^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \theta}$$

ESTO es una ecuación de movimiento.

(2) Si se consideran pequeños oscilaciones, podemos obtener la velocidad angular $\dot{\phi}$, ya que $\vec{L} = L\hat{k} = \dot{\phi}\hat{k}$,

Así $\ddot{\phi} + \frac{g}{L} \phi = 0 \quad / \quad \dot{\phi}$

$$\dot{\phi} \ddot{\phi} + \frac{g}{L} \phi \dot{\phi} = 0 \quad / \quad \int d\vec{L} \Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{g}{L} \frac{\phi^2}{2} = C$$

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{g}{L} \phi^2 + C \quad (c.i. \text{ si } \dot{\phi} = 0 \text{ y } \phi = \phi_M)$$

$$\Rightarrow C = \frac{g}{L} \phi_M^2 \Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{L} (\phi_M^2 - \phi^2)}}$$

NO es posible obtener $\phi(t)$, ya que no se poseen las condiciones iniciales

(3) Usando coordenadas polares podemos describir el origen O' con respecto a O como:

$$\vec{r} = L\hat{e} \quad ; \quad \dot{\vec{r}} = L\dot{\phi}\hat{\phi} \quad ; \quad \ddot{\vec{r}} = L\ddot{\phi}\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\hat{e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{r}} = g(\phi^2 - \phi_M^2)\hat{e} - g\phi\hat{\phi}}$$

(4) Primero observemos que $\hat{e} = -\hat{j}'$, $\hat{k} = \hat{k}'$ y $\hat{\phi} = \hat{x}'$

Nos piden todo en el sistema S'

Además: $\vec{r}' = x'\hat{x}' \quad \vec{a} = \ddot{x}'\hat{x}'$
 $\vec{v}' = \dot{x}'\hat{x}'$

Fuerzas reales. Normal: $\vec{N} = N \hat{j}'$

Peso: $\vec{p} = -mg \hat{j} = -mg(\sin \phi \hat{x}' + \cos \phi \hat{j}') \quad \text{pet. osc.}$
 $= -mg(\phi \hat{x}' + 1 \hat{j}')$

$$-m\ddot{\vec{r}} = -m(g(\phi^2 - \phi^4)\hat{x}' - g\phi\hat{j}') = m(g(\phi^2 - \phi^4)\hat{j}' + g\phi\hat{x}')$$

Fuerzas ficticias

Centrífuga: $\vec{F}_{\text{ant}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -m\dot{\phi}^2 \hat{k}' \times (\hat{k}' \times \hat{x}')$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ant}} = m\dot{\phi}^2 \hat{x}'}$$

Coriolis: $\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2m\dot{\phi}\dot{x}' \hat{k}' \times \hat{x}'$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\dot{\phi}\dot{x}' \hat{j}'}$$

Transversal: Clavante $\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k}'$

Así: $\vec{F}_{\text{trans}} = -m\vec{\omega} \times \vec{r}' = -m\dot{\phi} \hat{k}' \times \hat{x}'$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{trans}} = -m\dot{\phi} \hat{j}'}$$

$$(5) \quad m\ddot{x}' = N\hat{j}' - mg\phi\hat{x}' - mg\hat{j}' + mg(\phi^2 - \phi^4)\hat{j}' + m\dot{\phi}^2\hat{x}' - 2m\dot{\phi}\dot{x}'\hat{j}' - m\dot{\phi}\hat{j}'$$

Dado a que $\ddot{x}'$ solo tiene componentes en $\hat{x}'$, tomamos este vector y se tiene:

$$m\ddot{x}' = -mg\phi + mg\phi + m\dot{\phi}^2 x' = m\dot{\phi}^2 x'$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}' = \frac{mg}{L}(\phi^2 - \phi^4)x'}$$