Pauta Ejercicio 9

Prof: Patricio Cordero
Aux: Sergio Cofré.

$$\vec{F} = -m\Omega^2 (y\hat{\imath} + x\hat{\jmath})$$

m, Ω constantes

a) Mostrar que $\vec{F}$ es conservativa y encontrar $U(x,y)$ de ella, con $U(0,0) = 0$

$\vec{F}$ es conservativa si las derivadas cruzadas son iguales $\Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$,

en este caso $F_x = -m\Omega^2 y$; $F_y = -m\Omega^2 x$

$\Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = -m\Omega^2$ y $\frac{\partial F_y}{\partial x} = -m\Omega^2 \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ $\therefore$ $\vec{F}$ es conservativa //

0.5

Si $\vec{F}$ es conservativa, existe un potencial U tal que $-\nabla U = \vec{F}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial U}{\partial x} = -m\Omega^2 y \ / \int dx \Rightarrow U = m\Omega^2 xy + C(y)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = -m\Omega^2 x \ / \int dy \Rightarrow U = m\Omega^2 xy + B(x)$$

Dado a que $U(0,0) = 0 \Rightarrow \boxed{U = m\Omega^2 xy}$ 1.0

b) En el caso de estar restringida a moverse en una circunferencia de radio R, la partícula estará descrita por:

$\vec{r} = R\hat{r}$; $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$; $\vec{a} = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{r}$

con $x = R\cos\phi$; $y = R\sin\phi$

$$\Rightarrow U(x,y) = U(\phi) = R^2 m\Omega^2 \sin\phi \cos\phi$$

Recordando que $2\sin\phi\cos\phi = \sin(2\phi)$; se tiene que

$U(\phi) = \frac{1}{2} mR^2\Omega^2 \sin(2\phi)$ y además $K = K(\dot{\phi}) = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 = \frac{1}{2} mR^2\dot{\phi}^2$

0.5

$$\Rightarrow \boxed{E_{MT}(\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2} mR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} R^2\Omega^2 m \sin(2\phi)}$$

1.0

ojo que $\alpha = mR^2$, para después.

Generated by CamScanner

c) Encontrar $\boxed{\text{todos}}$!! los puntos de equilibrio con $0 \leq \phi \leq 2\pi$, y encontrar la frecuencia de pequeños oscilaciones en los puntos de equilibrio estable.

Los puntos de equilibrio se encuentran para $\frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{2}\Omega^2 R^2 m \sin(2\phi)\right) = m\Omega^2 R^2 \cos(2\phi)$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{d\phi} = 0 \Rightarrow \cos(2\phi) = 0 \quad = 2\phi = \frac{K\pi}{2} \text{ con } K \text{ impar}$$

$$\phi = \frac{K\pi}{4}$$

como $0 \leq \phi \leq 2\pi$, K solo puede tomar los valores 1, 3, 5, 7

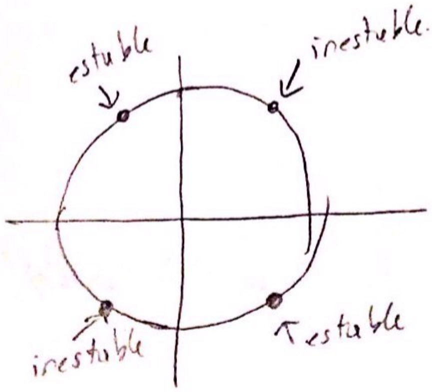
$$\Rightarrow \boxed{\phi eq = \frac{\pi}{4} \,;\, \frac{3\pi}{4} \,;\, \frac{5\pi}{4} \,;\, \frac{7\pi}{4}}$$ 1.0 (0.25 por c/u)

Para conocer la estabilidad evaluamos $\frac{d^2U}{d\phi^2}(\phi eq) = -2R^2\Omega^2 m \sin(2\phi)$

$$\Rightarrow \frac{d^2U}{d\phi^2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{d^2U}{d\phi^2}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2\Omega^2R^2m < 0 \Rightarrow \text{inestable.}$$

$$\frac{d^2U}{d\phi^2}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{d^2U}{d\phi^2}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2\Omega^2R^2m > 0 \Rightarrow \text{estable}$$

1.0 (0.25 c/u)



Luego la frecuencia de pequeños oscilaciones para $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$ está dada por.

$$w = \sqrt{\frac{U''(\phi eq)}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\Omega^2R^2m}{R^2m}}$$ tanto para $\frac{3\pi}{4}$ como $\frac{7\pi}{4}$

calculado anteriormente.

$$\Rightarrow \boxed{w = \sqrt{2}\,\Omega}$$ 1.0

Generated by CamScanner