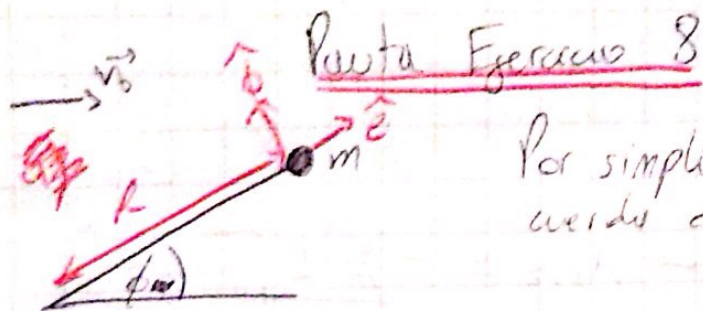




Prof: Patricio Cordero
Aux: Sergio Lotrè
12/08/14

Por simplicidad consideramos que la cuerda está siempre tensa.

$\vec{v}_0$

a) $\vec{r} = R\hat{e}_r$; $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{e}_\phi$; $\vec{a} = R\ddot{\phi}\hat{e}_\phi - R\dot{\phi}^2\hat{e}_r$

luego $\vec{F}_R = -c(\vec{v} - \vec{v}_0)$ donde $\vec{v}_0 = -v_0 \sin \phi \hat{e}_\phi + v_0 \cos \phi \hat{e}_r$
por geometría

$\Rightarrow \vec{F}_R = -c(R\dot{\phi}\hat{e}_\phi + v_0 \sin \phi \hat{e}_\phi - v_0 \cos \phi \hat{e}_r)$

Así las únicas fuerzas actuando sobre la masa son la tensión $\vec{T} = -T\hat{e}_r$ y la fuerza de roce $\vec{F}_R$

$\Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}_R - T\hat{e}_r$

$\Rightarrow m(R\ddot{\phi}\hat{e}_\phi - R\dot{\phi}^2\hat{e}_r) = -c(R\dot{\phi}\hat{e}_\phi + v_0 \sin \phi \hat{e}_\phi - v_0 \cos \phi \hat{e}_r) - T\hat{e}_r$

de donde se obtiene

$\hat{e}_r$ $-mR\dot{\phi}^2 = c v_0 \cos \phi - T$

$\hat{e}_\phi$ $\ddot{\phi} + \frac{c}{m}\dot{\phi} + \frac{c v_0 \sin \phi}{mR} = 0$

1.0 (0.54%)

b) Dado a que nos interesa el movimiento en ϕ , consideremos la EDO

$\ddot{\phi} + \frac{c}{m}\dot{\phi} + \frac{c v_0 \sin \phi}{mR} = 0$

la que corresponde a un EDO de segundo orden, lineal homogénea. De aquí que su polinomio característico está dado por:

$$(\lambda) = \lambda^2 + \frac{c}{m} \lambda + \frac{cV_0}{mR} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{cV_0}{mR}}}{2}$$

Para que el sistema sea un oscilador, $\Delta < 0$ y Δ correcto así se obtienen raíces complejas.

$$\Rightarrow \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{cV_0}{mR} < 0 \Rightarrow \boxed{V_0 > \frac{cR}{4m}} \quad \boxed{V_0 > \frac{cR}{4m}}$$

Como ya tenemos el polinomio y las raíces

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm i \sqrt{\frac{4cV_0}{mR} - \left(\frac{c}{m}\right)^2}}{2m} = \frac{-\frac{c}{m} \pm i \sqrt{\frac{cV_0}{mR} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}}{2m}$$

$$\text{Entonces } \phi(t) = A e^{\left(\frac{-c}{2m} + i\omega\right)t} + B e^{\left(\frac{-c}{2m} - i\omega\right)t} \\ = A e^{\frac{-c}{2m}t} e^{i\omega t} + B e^{\frac{-c}{2m}t} e^{-i\omega t}$$

$$\phi(t) = e^{\frac{-c}{2m}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

$$\text{Como } \phi(0) = \phi_0 \Rightarrow \boxed{A = \phi_0} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{4cV_0}{mR} - \left(\frac{c}{m}\right)^2}}$$

$$\dot{\phi}(0) = 0 \Rightarrow -\frac{c}{2m} A + (B\omega) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{c\phi_0}{2m\omega}}$$

$$\Rightarrow \phi(t) = e^{\frac{-c}{2m}t} \left(\phi_0 \cos(\omega t) + \frac{\phi_0 c}{2m\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$$\boxed{\phi(t) = \phi_0 e^{\frac{-c}{2m}t} \left(\cos(\omega t) + \frac{c}{2m\omega} \sin(\omega t) \right)}$$