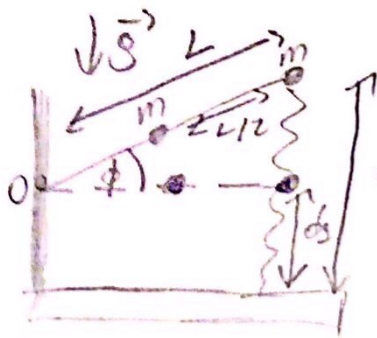


Practica P3 C2

FI 2001-4

Prof: Patricio Cordero

Aux: Sergio Cotrón.

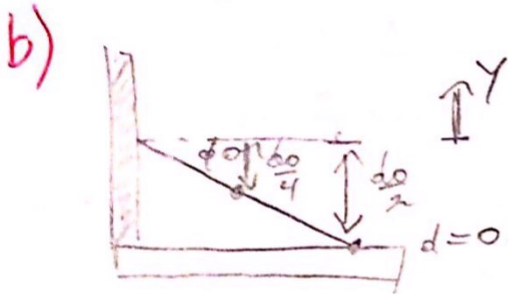


a) Determinar el largo d_1 de tal forma que la barra este en equilibrio de forma horizontal.

R// Para obtener el equilibrio consideremos el equilibrio rotacional con respecto a O. Es decir:

$$mg \frac{L}{2} + mgL = LK(d_0 - d_1) \Rightarrow \frac{3mg}{2K} = d_0 - d_1 \Rightarrow d_1 = d_0 - \frac{3mg}{2K}$$

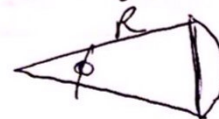
Así considerando que $d_1 = \frac{d_0}{2} \Rightarrow d_0 = \frac{3mg}{K}$



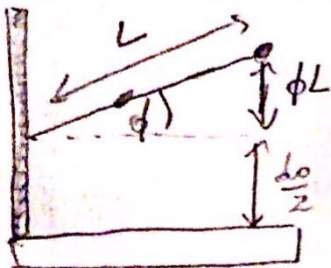
Considerando el origen del sistema (en este caso unidimensional) en el punto de equilibrio, y además asumiendo que $d_0 \ll L$, es decir, $\phi \ll 1$. Se tiene que:
 $\sin(\phi) \approx \phi$ y además la energía inicial del sistema es:

$$E_0 = \frac{1}{2} K d_0^2 - mg \frac{d_0}{4} - mg \frac{d_0}{2} = \frac{1}{2} K d_0^2 - \frac{3}{4} mg d_0 = E_0$$

Y dado a que no hay energías disipativas se tiene que la energía E_0 se conserva por cualquier ángulo ϕ , además como $\phi \ll 1$, se tiene:



$\Rightarrow \text{arco} \approx \text{recta} \Rightarrow \text{||recta||} = \phi R$



Así:

$$E_{\text{MT}}(\phi) = \frac{1}{2} K \left(\frac{d_0}{2} - \phi L \right)^2 + mg \left(\frac{\phi L}{2} + \phi L \right) + \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2)$$

$$E_{\text{MT}}(\phi) = \frac{1}{2} K \left(\frac{d_0}{2} - \phi L \right)^2 + \frac{3mgL}{2} \phi + \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2)$$

Luego para ϕ_{max} se debe cumplir $V=0$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2} K \frac{d_0^2}{4} - K \frac{d_0 \phi_{max} L}{2} + \frac{\phi_{max}^2 L^2 K}{2} + \frac{3mgL\phi_{max}}{2}$$

Iguando $E_0 = E_f$ y despejando se tiene que:

$$\frac{\phi^2 L^2 K}{2} + \left(\frac{3mgL}{2} - K \frac{d_0 L}{2} \right) \phi + \frac{K d_0^2}{8} - \frac{K d_0^2}{2} + \frac{3}{4} mg d_0 = 0$$

$$\Rightarrow \phi^2 + \left(\frac{3mg}{LK} - \frac{d_0}{L} \right) \phi + \left(\frac{3}{2} \frac{mg d_0}{KL^2} - \frac{3 d_0^2}{4 L^2} \right) = 0 \quad \text{y como } d_0 = \frac{3mg}{K}$$

$$\Rightarrow \phi^2 + \left(\frac{d_0}{L} - \frac{d_0}{L} \right) \phi + \left(\frac{d_0^2}{2 L^2} - \frac{3 d_0^2}{4 L^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \phi^2 = \frac{d_0^2}{L^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{d_0^2}{L^2} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\phi_{max} = \pm \frac{d_0}{2L}}$$

Este resultado tiene todo el sentido del mundo y en de esperarse, ya que sabemos que el punto de equilibrio estaba en $\frac{d_0}{2}$ y la condición inicial es con $\phi_0 = -\frac{d_0}{2L}$

c) Nuevamente como $\phi \ll 1$ podemos escribir la velocidad como $v = \dot{\phi} L \Rightarrow v_1 = \dot{\phi} \frac{L}{2} \quad v_2 = \dot{\phi} L \Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = \frac{5}{4} L^2 \dot{\phi}^2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{4} mL^2}$

$$\Rightarrow \boxed{E_{MT} = \frac{5}{8} m \dot{\phi}^2 L^2 + \frac{3mgL}{2} \phi + \frac{1}{2} K \left(\frac{d_0}{2} - \phi L \right)^2}$$

considerando ahora $\sin \phi \approx \phi$, se tiene que.

$$E_{MT} = \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 L^2 + \frac{3mgL}{2} \sin \phi + \frac{1}{2} K \left(\frac{d_0}{2} - L \sin \phi \right)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{E_{MT}} U(\phi) = \frac{3mgL}{2} \sin \phi + \frac{1}{2} K \left(\frac{d_0}{2} - L \sin \phi \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dU(\phi)}{d\phi} = \frac{3mgL}{2} \cos \phi + K \left(\frac{d_0}{2} - L \sin \phi \right) (-L \cos \phi)$$

donde claramente $\frac{dU(\phi=0)}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 U}{d\phi^2} = -\frac{d_0 K L}{2} \sin \phi + \frac{L K d_0}{2} \sin \phi + K L^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)$

y además

$$d_0 = \frac{3mg}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 U}{d\phi^2}(\phi=0) = \boxed{KL^2 = U''(0)}$$

Como $\omega_0^2 = \frac{U''(0)}{\alpha}$
 $\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{KL^2}{\frac{5}{4} mL^2}$
 $\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{4K}{5m}}}$