

Datos: $\rho(t) = \rho_0$; $\phi(t) = \omega t$; $z(t) = h - B\phi(t)$

C.I.: $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \omega$; $\phi(t)$ monótona
 ρ_0, h, ω, B cts.

a) Para este problema es evidente que se debe utilizar coordenadas cilíndricas. Así:

$$\vec{r} = \rho \hat{e} + z \hat{k} = \rho_0 \hat{e} + (h - B\phi(t)) \hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{v} = \rho_0 \dot{\hat{e}} + (0 - B\dot{\phi}) \hat{k} = \rho_0 \dot{\phi} \hat{\phi} - B\dot{\phi} \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\phi} (\rho_0 \hat{\phi} - B \hat{k})} \quad 0.5$$

$$\rightarrow \vec{a} = \rho_0 \ddot{\phi} \hat{\phi} + \rho_0 \dot{\phi} \dot{\hat{\phi}} - B \ddot{\phi} \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = \rho_0 \dot{\phi} \dot{\hat{\phi}} - \rho_0 \dot{\phi}^2 \hat{e} - B \ddot{\phi} \hat{k}} \quad 0.5$$

b) El vector ^{unitario} $\hat{e}$ pedido corresponde a aquel que apunta siempre tangencial a la trayectoria. Por concepto de derivada sabemos que esta dirección coincide con la dirección de la velocidad. Así se tiene que:

$$\hat{e} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\dot{\phi} (\rho_0 \hat{\phi} - B \hat{k})}{\sqrt{\dot{\phi}^2 (\rho_0^2 + B^2)}} = \frac{\rho_0 \hat{\phi} - B \hat{k}}{\sqrt{\rho_0^2 + B^2}} = \hat{e}$$

De aquí se puede obtener inmediatamente la rapidez dada por

$$\boxed{v = \|\vec{v}\| = \dot{\phi} \sqrt{\rho_0^2 + B^2}} \quad 0.7$$

Comentarios: Dado a que la ~~velocidad~~ rapidez corresponde a un escalar obtenido de un módulo, esta es siempre positiva. Por otro lado $\hat{E}$ puede ir uniendo su sentido por lo cual no tiene signo definido. 0.3

Nota: hasta aquí tenemos en 4.0

c) Nos piden obtener las componentes de la aceleración, tanto tangencial como normal. Hay más de una forma de hacer esto:

Usando directamente la aceleración obtenida en la parte vemos que las componentes tangenciales corresponden a:

$$\vec{a}_t = \rho_0 \ddot{\phi} \hat{\phi} - b \ddot{\phi} \hat{k}$$

$$= \|\vec{a}_t\| \hat{E} = \ddot{\phi} \sqrt{\rho_0^2 + b^2} \hat{E}$$

ambos resultados se aceptan como correctos. 1.0

Ahora para la aceleración en la dirección normal es fácil ver que corresponde a la componente de $\vec{a}$ en la $\vec{a}$ calculada en a)

$$\Rightarrow \vec{a}_n = -\rho_0 \dot{\phi}^2 \hat{C}$$

$$\vec{a}_n = \frac{\|\vec{v}\|_{\vec{n}}^2}{R} = \frac{\dot{\phi}^2 (\rho_0^2 + b^2)}{\rho_0} \hat{n}$$

ambos resultados están correctos. 1.0

d) Para que $\vec{a} \perp \hat{k}$ se requiere que la componente en $\hat{k}$ sea nula $\Rightarrow -b \ddot{\phi} = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0 \quad / \int dt$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = A' \quad / \int dt \Rightarrow \phi = At + B$$

por CI: $\phi(0) = 0 \Rightarrow A = \omega_0$ y $\phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\phi(t) = \omega_0 t$ 1.0