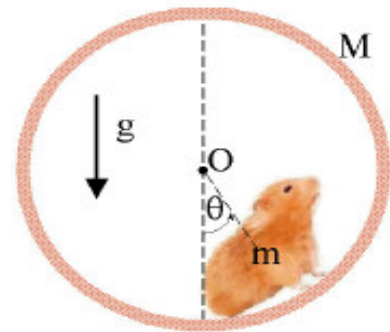


Problema 3 Examen FI21A-2 2003-2 Prof. P. Sotomayor

Un hámster de masa m está corriendo por el interior de su rueda de masa M . La rueda puede girar libremente en torno a su centro O (fijo) y la rapidez del hámster respecto a la rueda es V_0 (constante).

Determine:

- Diagramas de cuerpo libre y ecuaciones del movimiento para el hámster y para la rueda.
- la ecuación diferencial para $\theta = \theta(t)$ y el período para pequeñas oscilaciones.

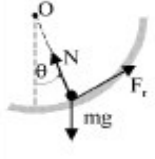
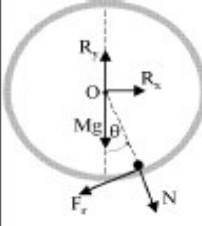


Nota: Por simplicidad considere que la rueda del hámster es un disco de masa M , uniformemente distribuida, y que el hámster no tiene dimensiones, pudiendo moverse como muestra la figura.

Solución:

a) Diagramas de cuerpo libre y ecuaciones del movimiento:

Sea φ el ángulo que mide el giro de la rueda con respecto a un sistema externo, entonces:

<u>Hámster:</u>		<u>Rueda:</u>	
<u>DCL:</u>	<u>Ecuaciones del movimiento:</u>	<u>DCL:</u>	<u>Ecuaciones del movimiento:</u>
	$N - mg \cos \theta = mR\dot{\theta}^2 \quad (1)$ $F_r - mg \sin \theta = mR\ddot{\theta} \quad (2)$		$\sum \vec{F}^{ext} = M \vec{a}_G = \vec{0}$ $\Rightarrow R_x + N \sin \theta - F_r \cos \theta = 0 \quad (3)$ $R_y - N \cos \theta - F_r \sin \theta = 0 \quad (4)$ $\sum \vec{\tau}_O^{ext} = I_O \vec{\alpha}$ $\Rightarrow R F_r = -I_O \ddot{\varphi} \quad (5)$

donde: $I_O = \int r^2 dm = \sigma_s \int r^2 dS = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\varphi = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{M R^2}{2}$

En (5): $R F_r = -\frac{M R^2}{2} \ddot{\varphi} \Rightarrow F_r = -\frac{M R}{2} \ddot{\varphi} \quad (6)$

b) Ecuación diferencial para $\theta = \theta(t)$ y el período para pequeñas oscilaciones

Del enunciado sabemos que el hámster se mueve con rapidez V_0 constante respecto de la rueda, es decir.

$$R(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = V_0 = \text{constante} \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varphi} \quad (7)$$

Igualando F_r de (2) y (6) y reemplazando (7):

$$-\frac{MR}{2}\ddot{\theta} - mg \sin \theta = mR\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2mg}{R(2m+M)} \sin \theta = 0$$

Para oscilaciones pequeñas $\sin \theta \approx \theta$

Entonces se puede aproximar: $\ddot{\theta} + \frac{2mg}{R(2m+M)} \theta = 0$

de donde: $\omega^2 = \frac{2mg}{R(2m+M)}$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{R(2m+M)}{2mg}}$