FI2001 Mecánica
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

EXAMEN

Tiempo: 3 Horas
3 de julio de 2012
Prof.: Patricia Sotomayor C.

P.1 Considere una partícula de masa $m$sometida únicamente a una fuerza central cuya energía potencial tiene la expresión:

$$U(r) = A\, r^c$$

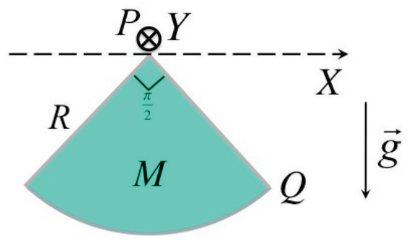
donde A y c son constantes conocidas y r es su distancia al centro de fuerza. Se pide:

a) Obtener una ecuación diferencial para $r(t)$.

b) Determinar el momento angular de la partícula con respecto al origen, cuando ésta describe una trayectoria circunferencial de radio R.

c) Si la trauectoria circunferencial anterior es perturbada radialmente, obtenga la frecuencia de las pequeñas oscilaciones de $r(t)$ en torno a R.

P.2 Considere una lámina en forma de sector de círculo de ángulo$\pi/2$ y radio R. La masa de la lámina es M y su densidad es uniforme. La lámina cuelga de su vértice P, respecto del cual puede oscilar libremente.

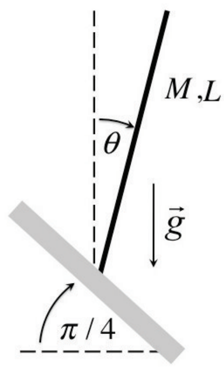


a) Determine los momentos de inercia de la lámina con respecto a los ejes horizontales X eY, que pasan por P, indicados en la figura.

b) Determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones cuando la lámina oscila en torno al eje X y cuando ella oscila en torno al eje$Y$.

c) Si la lámina es liberada desde el reposo, con su lado horizontales PQ horizontal a lo largo del eje X , determine la máxima rapidez que alcanza su centro de masa , girando en torno al eje$Y$.

P.3 Una barra rígida, ideal, homogénea de largo L y masa M se encuentra apoyada sobre una superficie inclinada en$\pi/4$respecto de la horizontal.



a) Si la barra se encuentra inicialmente vertical y en reposo, y es perturbada ligeramente tal que comienza a caer en la dirección indicada en la figura, sin que deslice el punto de apoyo, encuentre la velocidad angular de la barra en función de θ.

b) Determine las fuerzas normal y tangencial, que la superficie ejerce sobre la barra en el punto de apoyo, en función de θ.

c) Si ahora la barra se observa deslizar pendiente abajo manteniendo una inclinación constante $\theta = \pi/6$, determine el valor del coeficiente de roce dinámico $\mu_d$que existe entre la barra y la supeficie.

Nota: El momento de inercia de una barra homogénea de largo $\boldsymbol{L}$ y masa $\boldsymbol{M}$ con respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro es $\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{ML^2}}{\boldsymbol{12}}$

P1

a) Ec diferencial

$U(r) = A r^{c} \Rightarrow F(r) = -Ac r^{(c-1)} \hat{r}$

Ademas $l_0 = cte$ (mom. angular) $= m r^2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{l_0}{m r^2}$

$\Rightarrow$ la ec. diferencial en r es: $m\left(\ddot{r} - r \frac{l_0^2}{m^2 r^4}\right) = -A c r^{(c-1)}$

o bien: $m\ddot{r} + \underbrace{A c r^{(c-1)} - \frac{l_0^2}{m r^3}}_{\frac{d}{dr} U^*(r)} = 0$

b) Si $r = R = cte \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

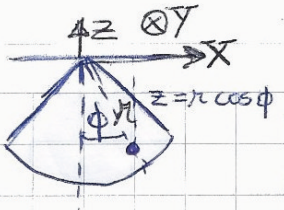
En la ec. diferencial $\Rightarrow A c R^{(c-1)} = \frac{l_0^2}{m R^3} \Rightarrow l_0^2 = A c\, m R^{(c+2)}$

c) $\omega_{po}^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2 U^*}{dr^2}\right)_R = \frac{d}{dr}\left(\frac{-l_0^2}{m^2 r^3} + \frac{A}{m} c r^{(c-1)}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{-A c m R^{(c+2)}}{m^2 r^3} + \frac{A}{m} c r^{(c-1)}\right)$

$= \frac{Ac}{m} \frac{d}{dr}\left(r^{(c-1)} - \frac{R^{(c+2)}}{r^3}\right) = \frac{Ac}{m}\left((c-1) R^{(c-2)} + 3R^{(c-2)}\right) = \frac{Ac}{m}(c+2) R^{(c-2)}$

$= \frac{Ac}{m} \frac{d}{dr}\left(r^{(c-1)} - \frac{R^{(c+2)}}{r^3}\right) = \frac{Ac}{m}\left[(c-1) R^{(c-2)} + 3 R^{(c-2)}\right] = \frac{Ac}{m}(c+2) R^{(c-2)}$

P2 a) Momentos de Inercia



Densidad Uniforme $\Rightarrow \sigma_S = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi R^2/4} = \frac{4M}{\pi R^2}$

i) c/r al eje X: $I_{xx} = \int_S (y^2+z^2)\,dm$

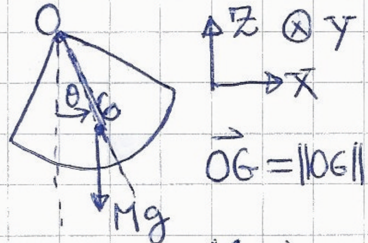
Superficie plana $\Rightarrow y = cte$ (en el origen) $\Rightarrow I_{xx} = \int_S z^2 dm = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^R r^2\cos^2\phi\, \sigma_S \underbrace{r\,dr\,d\phi}_{dS}$

$$I_{xx} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2\phi \underbrace{\left[\int_0^R \frac{4M}{\pi R^2} r^3 dr\right]}_{\frac{\cancel{4}M}{\pi \cancel{R^2}}\cdot\frac{R^{\cancel{4}2}}{\cancel{4}}} d\phi = \frac{MR^2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2\phi\, d\phi = \frac{MR^2}{\pi}\left[\phi/2 + \frac{\operatorname{sen} 2\phi}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{MR^2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

ii) c/r al eje Y: $I_{yy} = \int_S (x^2+z^2)\,dm = \int_S r^2 dm = \frac{4M}{\pi R^2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^R r^2 r\,dr\,d\phi = \frac{4M}{\pi R^2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{R^4}{4}d\phi$

$$I_{yy} = \frac{MR^2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

b) i) Giro en torno al eje Y



$\vec{\tau}_O = \vec{OG}\times Mg(-\hat{k})$

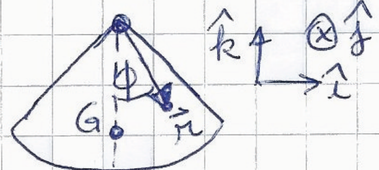
$\vec{OG} = \|OG\|\left(\cos\theta(-\hat{k}) + \operatorname{sen}\theta\,\hat{i}\right) \Rightarrow \vec{\tau}_o = \|\vec{OG}\|\cdot Mg \operatorname{sen}\theta(\hat{j})$

Movimiento plano $\Rightarrow \vec{\tau}_O = I_{yy}\ddot{\theta}\,(-\hat{j}) \Rightarrow OGMg\operatorname{sen}\theta = -I_{yy}\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\|OG\|Mg}{I_{yy}}}_{\omega_{poy}^2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

(ya que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ para pequeñas oscilaciones en torno a $\theta = 0$)

Cálculo de la distancia $\|\vec{OG}\|$



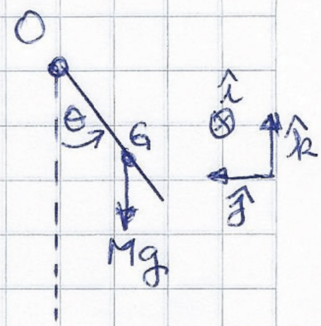
$$\vec{OG} = \frac{1}{M}\sigma_S\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^R \left(r\cos\phi(-\hat{k}) + r\operatorname{sen}\phi\,\hat{i}\right) r\,dr\,d\phi$$

$$= \frac{1}{M}\cdot\frac{4M}{\pi R^2}\cdot\frac{R^3}{3}\underbrace{\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\cos\phi(-\hat{k}) + \operatorname{sen}\phi\,\hat{i}\right)}_{\left(\operatorname{sen}\phi(-\hat{k}) - \cos\phi(\hat{i})\right)_{-\pi/4}^{\pi/4}} = \frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}\,(-\hat{k})$$

(Esta dirección corresponde al equilibrio estático)

Entonces: $\omega_{poy}^2 = \dfrac{\frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}\, M g}{\frac{MR^2}{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}\, g}{3\pi R}$

ii) <u>Giro en torno al eje X</u>

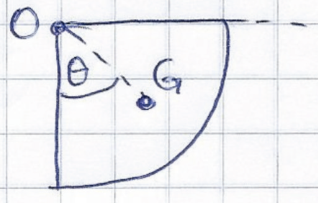


$\vec{\tau}_O = \vec{OG}\times Mg(-\hat{k}) = OG\left[\cos\theta(-\hat{k}) + \text{sen}\,\theta(-\hat{j})\right]\times Mg(-\hat{k})$

$\vec{\tau}_O = \dfrac{4R\sqrt{2}}{3\pi} Mg\, \text{sen}\,\theta(\hat{i}) = I_{xx}\ddot{\theta}(-\hat{i}) = \dfrac{MR^2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)(-\hat{i})$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\dfrac{4\sqrt{2}}{3\pi R}\, g\cdot\dfrac{1}{\left(1/4+\frac{1}{2\pi}\right)}}_{\omega_{pox}^2}\ \text{sen}\,\theta = 0$

c) $(v_G)_{máx} = OG\cdot\dot{\theta}_{máx}$



$U_g^{ref} = 0$

$\theta_i = \pi/4$

EMT = cte

Inicialmente $K_i = 0$; $U_g^i = -Mg\, OG\cos\pi/4 = -4MgR/3\pi$

En el movimiento: $K = \frac{1}{2} I_{yy}\dot{\theta}^2 = \dfrac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2$; $U_g = -Mg|OG|\cos\theta = -Mg\cdot\dfrac{4R\sqrt{2}}{3\pi}\cos\theta$

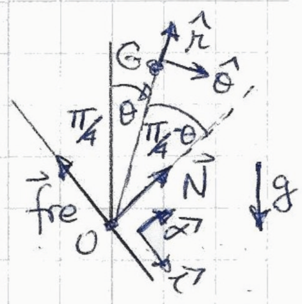
$EMT_i = EMT(\theta) \Rightarrow -\dfrac{4\cancel{M}g\cancel{R}}{3\pi} = \dfrac{\cancel{M}R^{\cancel{2}}}{4}\dot{\theta}^2 - \cancel{M}g\cdot\dfrac{4\cancel{R}\sqrt{2}}{3\pi}\cos\theta$

$\dot{\theta}^2(\theta) = \dfrac{16g}{3\pi R}\left(\sqrt{2}\cos\theta - 1\right) \Rightarrow \dot{\theta}^2_{máx} = \dfrac{16g}{3\pi R}(\sqrt{2}-1)$

(P3) a) la energía se conserva

O es fijo $\Rightarrow EMT = Mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2$

$$\left.\begin{array}{l} EMT(\theta) = \frac{MgL}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \\ EMT(0) = \frac{MgL}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MgL^2}{6}\dot{\theta}^2 = \frac{MgL}{2} - \frac{MgL}{2}\cos\theta \Rightarrow \dot{\theta}^2(\theta) = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)$$



b) $M\vec{a}_G = \vec{fre} + \vec{N} + M\vec{g} = fre(-\hat{i}) + N(\hat{j}) + Mg\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right]$

$\vec{a}_G = \frac{L}{2}\ddot{\theta}\hat{\theta} - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\hat{r} = a_{Gx}\hat{i} + a_{Gy}\hat{j}$

$\vec{a}_G = \frac{L}{2}\left[\ddot{\theta}\left(\cos(\pi/4-\theta)\hat{i} + \mathrm{sen}(\pi/4-\theta)\hat{j}\right) - \dot{\theta}^2\left(\cos(\pi/4-\theta)\hat{j} + \mathrm{sen}(\pi/4-\theta)(-\hat{i})\right)\right]$

$Mg\frac{\sqrt{2}}{2} - fre = Ma_{Gx}$

$-\frac{Mg\sqrt{2}}{2} + N = Ma_{Gy}$

$\ddot{\theta}$ lo obtenemos haciendo $\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}\cancel{\dot{\theta}} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{3g}{2L}\,\mathrm{sen}\theta$

Entonces:

$$fre = M\frac{3g}{4}\mathrm{sen}\theta\cos(\pi/4-\theta) + M\frac{3g}{2}(1-\cos\theta)\,\mathrm{sen}(\pi/4-\theta) - Mg\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N = M\frac{3g}{4}\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}(\pi/4-\theta) - M\frac{3g}{2}(1-\cos\theta)\cos(\pi/4-\theta) + Mg\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) $\theta = cte \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_G = \vec{0} = GO(-\hat{r})\times(\vec{fre} + \vec{N}) \Rightarrow (\vec{fre} + \vec{N})\times\hat{r} = \vec{0}$

$\Rightarrow [fre(-\hat{i}) + N(\hat{j})]\times[\cos(\pi/4-\theta)\hat{j} + \mathrm{sen}(\pi/4-\theta)(-\hat{i})] = fre\cos(\pi/4-\theta)(-\hat{k}) + N\,\mathrm{sen}(\pi/4-\theta)(\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow fre\cos(\pi/4-\theta) = N\,\mathrm{sen}(\pi/4-\theta) \Rightarrow fre = N\,\mathrm{tg}(\pi/4-\theta) = \mu_d N$

$\Rightarrow \mu_d = \mathrm{tg}(\pi/4-\theta)\Big|_{\theta=\pi/6} = \mathrm{tg}(\pi/4-\pi/6) = \mathrm{tg}(\pi/12)$