FI2001 Mecánica

Apuntes complementarios a la clase de cátedra del 7 de abril de 2011

Prof. Patricia Sotomayor

SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES

1. INTRODUCCION

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n es una identidad de la forma:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

donde:

x = variable independiente

y = función de x (incógnita)

$\frac{d^ny}{dx^n}$ = enésima derivada de la función y con respecto a x

Una EDO **lineal** de orden n tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = Q(x) \qquad (1.2)$$

donde: $Q(x)$ es una función de x, conocida.

Si $Q(x) = 0$: se trata de una EDO **homogénea**

Si $Q(x) \neq 0$: se trata de una EDO **no homogénea**

donde $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ son los coeficientes de la EDO. En el caso particular que a_0, a_1, ..., a_n son constantes, se trata de una EDO **de coeficientes constantes**

2. EDO LINEAL NO HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES

Analicemos la solución de una EDO **de orden n, lineal, no homogénea y de coeficientes constantes**, es decir:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 \; y = \; Q(x) \tag{2.1}$$

La solución general de la EDO está dada por:

$$y(x) = \; y_h(x) + y_p(x) \tag{2.2}$$

donde: $y_h(x)$ corresponde a **<u>la solución general</u>** de la EDO homogénea (haciendo $Q(x)=0$ en (2.1))

$y_p(x)$ corresponde a **<u>una solución particular</u>** de la EDO no homogénea (ecuación original (2.1), con $Q(x) \neq 0$)

<u>Obtención de $y_p(x)$:</u>

Una solución particular $y_p(x)$ es cualquier solución que satisface la ecuación:

$$a_n \frac{d^n y_p}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy_p}{dx} + a_0 \; y_p = Q(x) \tag{2.3}$$

<u>Obtención de $y_h(x)$:</u>

Para determinar la solución general de la ecuación homogénea:

$$a_n \frac{d^n y_h}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_h}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy_h}{dx} + a_0 \; y_h = 0 \tag{2.4}$$

suponemos que tiene la forma: $y_h(x) = e^{sx}$, donde s es una constante por determinar.

En efecto, si s es cte:

$$\frac{d(e^{sx})}{dx} = s \; e^{sx}$$

$$\frac{d^n(e^{sx})}{dx^n} = s^n \; e^{sx}$$

reemplazando en (2.4): $$\left[a_n \; s^n + a_{n-1} \; s^{n-1} + \cdots + a_1 \; s + a_0\right] e^{sx} = 0 \tag{2.5}$$

para que esta identidad (2.5) se satisfaga $\forall \; x$ es necesario y suficiente que el polinomio de esta ecuación sea igual a cero.

es decir: $a_n \; s^n + a_{n-1} \; s^{n-1} + \cdots + a_1 \; s + a_0 = 0$ (polinomio característico de la EDO) como es un polinomio de grado n sabemos que tiene n soluciones (raíces): $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Por lo tanto, la EDO homogénea (2.4) tiene n soluciones independientes de la forma:

$$y_{1h}(x) = e^{s_1 x},\ y_{2h}(x) = e^{s_2 x},\ \ldots,\ y_{nh}(x) = e^{s_n x}$$

Además, cualquier combinación lineal de estas n soluciones también es solución de la EDO. Por lo tanto, **<u>la solución general para $y_h(x)$</u>** está dada por:

$$y_h(x) = A_1\, e^{s_1 x} + A_2\, e^{s_2 x} + \ldots + A_n\, e^{s_n x} \tag{2.6}$$

en que $A_1, A_2, \ldots, A_n$: son constantes de integración.

Finalmente, la solución general de la EDO original (2.1) es $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + A_1\, e^{s_1 x} + A_2\, e^{s_2 x} + \ldots + A_n\, e^{s_n x}} \tag{2.7}$$

La solución única se determina a partir de n condiciones de borde independientes. Por ejemplo, las siguientes:

$$y(x_0) = y_0 \quad ; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = y_0' \quad ; \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x_0} = y_0'' \ ; \ \cdots \ ; \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x_0} = y_0^{(n)}$$

imponiendo estas condiciones sobre la solución $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ quedan definidas las constantes $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, es decir se obtiene la solución única.

3. CASO PARTICULAR

EDO **de segundo orden** , lineal, no homogénea y de coeficientes constantes.

Este tipo de EDO tiene la forma:

$$\boxed{a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0\ y = Q(x)} \tag{3.1}$$

3.1. Solución homogénea

De (2.6) sabemos que $y_h(x)$ tiene la forma: $y_h(x) = A_1\, e^{s_1 x} + A_2\, e^{s_2 x}$

donde s_1 y s_2 son las raíces del polinomio $a_2\, s^2 + a_1\, s + a_0 = 0$

Es decir:

$$s = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} \quad , \quad \text{sea } \Omega^2 = \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}$$

entonces $s = -\dfrac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\Omega^2}$

Dependiendo del signo del término sub-radical Ω^2, podemos distinguir tres casos:

<u>Caso 1</u>: $\Omega^2 > 0$

Las raíces del polinomio característico son números reales y distintos

la solución es:

$$\boxed{y_{h1}(x) = A_1\, e^{\left(-\frac{a_1}{2a_2} + \Omega\right)x} + A_2\, e^{\left(-\frac{a_1}{2a_2} - \Omega\right)x}} \qquad (3.1.1)$$

<u>Caso 2</u>: $\Omega^2 = 0$

Las raíces del polinomio característico son números reales e iguales.

Sin embargo, para la solución no sirven dos raíces iguales. Esto se debe a que la combinación lineal de ellas nos conduce a la misma y única, siendo necesario satisfacer dos condiciones iniciales. En este caso la solución tiene la siguiente forma:

$$\boxed{y_{h2}(x) = A_1\, e^{-\frac{a_1}{2a_2}x} + A_2\, x\, e^{-\frac{a_1}{2a_2}x}} \qquad (3.1.2)$$

<u>Caso 3</u>: $\Omega^2 < 0$

Las raíces del polinomio característico son números complejos conjugados.

la solución es:

$$y_{h3}(x) = A_1\, e^{\left(-\frac{a_1}{2a_2} + i\,\Omega\right)x} + A_2\, e^{\left(-\frac{a_1}{2a_2} - i\,\Omega\right)x}$$

$$y_{h3}(x) = \left[A_1\, e^{i\,\Omega\, x} + A_2\, e^{-i\,\Omega\, x}\right] e^{-\frac{a_1}{2a_2}x}$$

pero: $e^{i\,\Omega\,x} = \cos\,(\Omega\,x) + i\,\mathrm{sen}\,(\Omega\,x)$

$$\Rightarrow\; y_{h\,3}(x) = \left[(A_1 + A_2)\,\cos\,(\Omega\,x) + i\,(A_1 - A_2)\,\mathrm{sen}\,(\Omega\,x)\right] e^{-\frac{a1}{2a2}x}$$

es decir: $$\boxed{y_{h\,3}(x) = e^{-\frac{a1}{2a2}x}\left[\,C_1\,\cos\,(\Omega\,x) + C_2\,\mathrm{sen}\,(\Omega\,x)\right]} \qquad (3.1.3)$$

3.2. Solución particular

La solución particular depende de la función $Q(x)$ en la ecuación (3.1).

Veamos los siguientes dos casos:

a) Función constante: $Q(x) = K = cte$ (conocida)

En este caso postulamos que $y_p(x)$ también es una constante. Como es una solución de ecuación (3.1), se debe cumplir que:

$$a_2\,\frac{d^2 y_p}{dx^2} + a_1\,\frac{dy_p}{dx} + a_0\,y_p = K \qquad (3.2.1)$$

donde:

$$\frac{d^2 y_p}{dx^2} = \frac{dy_p}{dx} = 0$$

reemplazando en $(3.2.1)$:

$a_0\,y_p = K \;\Rightarrow\; y_p = \dfrac{K}{a_0}$ (se obtiene una función conocida para y_p)

Reemplazando en (2.2), la solución general es:

$y(x) = \dfrac{K}{a_0} + y_h(x)$, donde $y_h(x)$ está dada por $(3.1.1)$, $(3.1.2)$ ó $(3.1.3)$ según el caso.

Supongamos, por ejemplo, que estamos en el caso 1. Entonces:

$$y(x) = \frac{K}{a_0} + A_1\,e^{\left(-\frac{a1}{2a2}+\Omega\right)x} + A_2\,e^{\left(-\frac{a1}{2a2}-\Omega\right)x}$$

La solución única la obtenemos con las condiciones iniciales:

$y(x=0)=y_0 \qquad (3.2.2.a)$

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}=y'_0 \qquad (3.2.2.b)$

Imponemos la condición inicial (3.2.2.a)

$$y_0=\frac{K}{a_0}+A_1\ e^0+A_2\ e^0=\frac{K}{a_0}+A_1+A_2$$

Análogamente, imponemos la condición inicial (3.2.2.b)

$$y'_0=\left[-\frac{a_1}{2a_2}+\Omega\right]A_1-\left[\frac{a_1}{2a_2}+\Omega\right]A_2$$

de donde se despejan los valores de A_1 y A_2, y obtenemos la solución única para $y(x)$.

b) Función sinusoidal: $Q(x)=F_1\ \mathrm{sen}\,\omega x+F_2\cos\omega x$ (conocida)

En este caso postulamos que $y_p(x)$ es una sinusoidal con la misma frecuencia que la función $Q(x)$, que la podemos escribir como:

$$y_p(x)=D_1\ \mathrm{sen}\,\omega x+D_2\cos\omega x \qquad (3.2.2)$$

Para reemplazarla en (3.1) calculamos la primera y segunda derivada con respecto a x.

$$\frac{dy_p}{dx}=D_1\ \omega\cos\ \omega\ x-D_2\ \omega\ \mathrm{sen}\ \omega\ x \qquad (3.2.3)$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2}=-D_1\ \omega^2\ \mathrm{sen}\ \omega\ x+D_2\ \omega^2\ \cos\ \omega\ x \qquad (3.2.4)$$

Reemplazando (3.2.2) , (3.2.3) y (3.2.4) en (3.1):

$$a_2(-D_1\ \omega^2\ \mathrm{sen}\ \omega\ x+D_2\ \omega^2\cos\ \omega\ x)+a_1(D_1\ \omega\cos\ \omega\ x-D_2\ \omega\ \mathrm{sen}\ \omega\ x)+$$
$$a_0\ (D_1\ \mathrm{sen}\ \omega\ x+D_2\cos\ \omega\ x)=F_1\ \mathrm{sen}\ \omega\ x+F_2\cos\ \omega\ x$$

agrupando los términos constantes:

$$(a_0\ D_1-a_1D_2\omega-a_2D_1\ \omega^2)\ \mathrm{sen}\,\omega x+(a_2D_2\ \omega^2+a_1D_1\ \omega+a_0D_2)\cos\omega x=F_1\ \mathrm{sen}\,\omega x+F_2\cos\omega x$$

dado que esta igualdad debe satisfacerse para todo x, se desprende que:

$$a_0 D_1 - a_1 D_2 \omega - a_2 D_1 \omega^2 = F_1 \qquad (3.2.5.a)$$
$$a_2 D_2 \omega^2 + a_1 D_1 \omega + a_0 D_2 = F_2 \qquad (3.2.5.b)$$

de donde se despejan las incógnitas D_1 y D_2 obteniendo una función conocida para $y_p(x)$.

En forma análoga al caso (a), se plantea la solución general dada por (2.2), y luego se determinan las constantes (que provienen de la solución homogénea) imponiendo dos condiciones de borde independientes, que deben ser conocidas para obtener la solución única para $y(x)$.

4. EJEMPLOS

EJEMPLO 1:

Una partícula P de masa m se mueve sin roce, unida al extremo de un resorte de constante k y largo natural l_0, cuyo otro extremo está fijo en A. Además P está sometida a la acción de una fuerza $F(t)$.

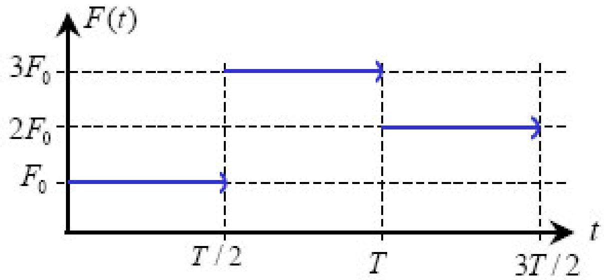
Inicialmente P se encuentra en reposo, con el resorte estirado en X_0, donde: $X_0 = \frac{F_0}{k}$

Encuentre una expresión para el largo del resorte en función del tiempo si:

a) $F(t) = 0$.

b) $F(t)$ es la representada en al gráfico

c) $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$, analice qué ocurre si $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$



Solución:

Parte (a):

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son: la fuerza elástica (horizontal), el peso (vertical) y la normal (vertical). Sea x la deformación del resorte, entonces el largo del resorte es $l = x + l_0$

El movimiento es sólo horizontal, de donde las ecuaciones escalares del movimiento son:

$$\hat{i}: \quad m\ddot{x} = -kx \qquad (1)$$

$$\hat{j}: \quad 0 = N - mg \qquad (2)$$

La ecuación (1) también la podemos escribir como: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, donde $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Esta es la ecuación de un movimiento armónico simple (M.A.S.) de frecuencia natural ω y período $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Su solución es: $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t) = C_3 \cos(\omega t + \phi)$

En efecto, al revisar estos apuntes vemos que la solución de esta ecuación es:

$$x(t) = A_1\, e^{s_1 t} + A_2\, e^{s_2 t}$$

donde s_1, s_2 son las raíces del polinomio $s^2 + \omega^2 = 0$, entonces: $s = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$

Es decir, $x(t) = A_1\, e^{i\omega t} + A_2\, e^{-i\omega t}$ (la ecuación original es homogénea).

Ahora imponemos las condiciones iniciales para determinar los valores de las constantes C_1 y C_2

$$x(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0) = \frac{F_0}{k} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{F_0}{k}$$

$$\dot{x}(0) = -C_1\omega \operatorname{sen}(0) + C_2\, \omega \cos(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

de donde $l(t) = l_0 + x(t) = l_0 + \dfrac{F_0}{k}\cos(\omega t)$

Parte (b):

Ahora existe además una fuerza externa F, cuya magnitud se indica en el gráfico. Luego, la ecuación del movimiento en la dirección horizontal es:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m} \qquad (3)$$

La solución homogénea es la misma encontrada en la parte (a). La solución particular la obtenemos para cada intervalo de tiempo. En cada uno de ellos la fuerza F es constante y según lo descrito en (3.2.a) postulamos la solución particular $x_p = cte \Rightarrow \ddot{x}_p = 0$

i) Intervalo $0 \le t \le T/2$

Reemplazando en (3): $\frac{k}{m} x_p = \frac{F_0}{m} \Rightarrow x_p = \frac{F_0}{k}$

Entonces: $x(t) = C'_1 \cos(\omega t) + C'_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{k}$

Imponemos las condiciones iniciales:

$$x(0) = C'_1 \cos(0) + C'_2 \operatorname{sen}(0) + \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{k} \qquad \Rightarrow C'_1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = -C'_1\, \omega \operatorname{sen}(0) + C'_2\, \omega \cos(0) = 0 \Rightarrow C'_2 = 0$$

de donde $x(t) = \frac{F_0}{k}$ para $0 \le t \le T/2$

En efecto en este intervalo se compensa la fuerza F con la fuerza elástica.

ii) Intervalo $T/2 \le t \le T$

reemplazando en (3): $\frac{k}{m} x_p = \frac{3F_0}{m} \Rightarrow x_p = \frac{3F_0}{k}$

Entonces: $x(t) = C''_1 \cos(\omega t) + C''_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{3F_0}{k}$

Imponemos las condiciones iniciales del nuevo intervalo, que corresponden a las condiciones finales del intervalo anterior (esta vez en $t = T/2$), donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$x(T/2) = C''_1 \cos(\pi) + C''_2 \operatorname{sen}(\pi) + \frac{3F_0}{k} = \frac{F_0}{k} \qquad \Rightarrow C''_1 = \frac{2F_0}{k}$$

$$\dot{x}(T/2) = -C''_1\, \omega \operatorname{sen}(\pi) + C''_2\, \omega \cos(\pi) = 0 \Rightarrow C''_2 = 0$$

de donde $x(t) = \frac{2F_0}{k} \cos(\omega t) + \frac{3F_0}{k}$ para $T/2 \le t \le T$

En este intervalo la partícula oscila en torno a $x = \frac{3F_0}{k}$ con amplitud $\frac{2F_0}{k}$

iii) Intervalo $T \leq t \leq 3T/2$

Reemplazando en (3): $\dfrac{k}{m}x_p = \dfrac{2F_0}{m}$ => $x_p = \dfrac{2F_0}{k}$

Entonces: $x(t) = C'''_1 \cos(\omega t) + C'''_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \dfrac{2F_0}{k}$

Imponemos las condiciones iniciales del nuevo intervalo, que corresponden a las condiciones finales del intervalo anterior (esta vez en $t = T$).

$$x(T) = C'''_1 \cos(2\pi) + C'''_2 \operatorname{sen}(2\pi) + \frac{2F_0}{k} = \frac{2F_0}{k}\cos(2\pi) + \frac{3F_0}{k} = \frac{5F_0}{k} \Rightarrow C'''_1 = \frac{3F_0}{k}$$

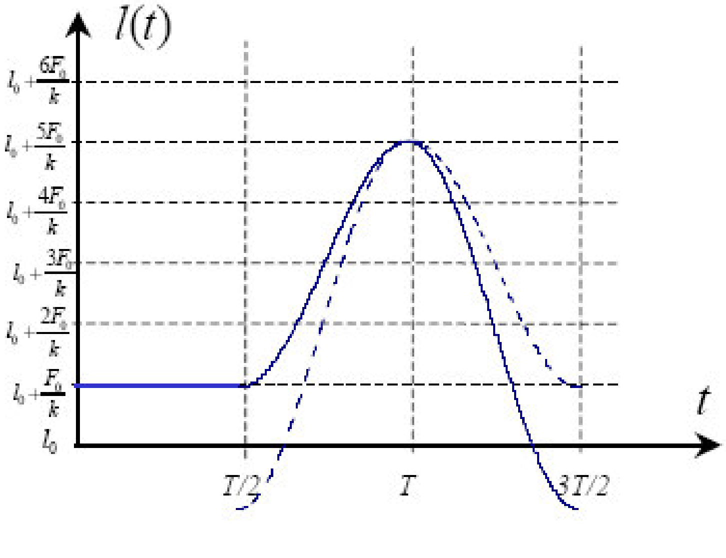
$$\dot{x}(T) = -C'''_1 \omega \operatorname{sen}(2\pi) + C'''_2 \omega \cos(2\pi) = -\omega \frac{2F_0}{k} \operatorname{sen}(2\pi) = 0 \Rightarrow C'''_2 = 0$$

de donde $x(t) = \dfrac{3F_0}{k}\cos(\omega t) + \dfrac{2F_0}{k}$ para $T \leq t \leq 3T/2$

En este intervalo la partícula oscila en torno a $x = \dfrac{2F_0}{k}$ con amplitud $\dfrac{3F_0}{k}$

Por lo tanto, el largo del resorte $l(t) = l_0 + x(t)$ puede expresarse como:

$$l(t) = \begin{cases} l_0 + \dfrac{F_0}{k} & \text{para } 0 \leq t \leq T/2 \\ l_0 + \dfrac{2F_0}{k}\cos(\omega t) + \dfrac{3F_0}{k} & \text{para } T/2 \leq t \leq T \\ l_0 + \dfrac{3F_0}{k}\cos(\omega t) + \dfrac{2F_0}{k} & \text{para } T \leq t \leq 3T/2 \end{cases}$$



Parte (c):

La ecuación del movimiento en la dirección horizontal también está dada por la ecuación (3), donde la fuerza externa F tiene ahora la forma $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$.

La solución particular la obtenemos según lo descrito en (3.2.b), postulando la siguiente expresión:

$$x_p(t) = D_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + D_2 \cos(\omega_0 t)$$

de donde:

$$\dot{x}_p(t) = D_1\omega_0 \cos(\omega_0 t) - D_2\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -D_1\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) - D_2\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

Reemplazando en (3):

$$-D_1\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) - D_2\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \frac{k}{m}\left[D_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + D_2 \cos(\omega_0 t)\right] = \frac{1}{m} F_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

dado que esta igualdad debe cumplirse $\forall t$ se deben verificar las siguientes ecuaciones e:

$$-D_1\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{k}{m}\left[D_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t)\right] = \frac{1}{m} F_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t) \quad \Rightarrow D_1 (k - m\omega_0^2) = F_0, \ (k \neq m\omega_0^2)$$

$$-D_2\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \frac{k}{m}\left[D_2 \cos(\omega_0 t)\right] = 0 \quad \Rightarrow D_2 (k - m\omega_0^2) = 0$$

de donde: $x_p(t) = \dfrac{F_0}{k - m\omega_0^2} \operatorname{sen}(\omega_0 t)$, con $k \neq m\omega_0^2$

La solución homogénea es la misma encontrada en la parte (a).

Por lo tanto: $x(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \dfrac{F_0}{k - m\omega_0^2} \operatorname{sen}(\omega_0 t)$

O bien: $x(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \dfrac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \operatorname{sen}(\omega_0 t)$,

donde ω es la frecuencia natural del sistema.

Imponemos las condiciones iniciales:

$$x(0) = B_1 \cos(0) + B_2 \operatorname{sen}(0) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \operatorname{sen}(0) = \frac{F_0}{k} \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = -B_1\omega \operatorname{sen}(0) + B_2\omega \cos(0) + \frac{F_0\omega_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos(0) = 0 \quad \Rightarrow B_2 = -\frac{F_0\omega_0}{m\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

de donde: $x(t) = \dfrac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\left[\text{sen }(\omega_0 t) - \dfrac{\omega_0}{\omega}\text{sen }(\omega t)\right]$, con $\omega \neq \omega_0$

Si $\omega_0 = \omega$ la solución particular obtenida anteriormente ya no es válida.
En este caso postulamos una solución particular del tipo: $x_p(t) = (D_3 + D_4\ t)\,\text{sen }(\omega_0 t + \phi)$

entonces:

$$\dot{x}_p(t) = D_4\ \text{sen }(\omega_0 t + \phi) + (D_3 + D_4\ t)\omega_0 \cos\ (\omega_0 t + \phi)$$
$$\ddot{x}_p(t) = 2D_4\omega_0 \cos(\ \omega_0 t + \phi) - (D_3 + D_4\ t)\omega_0^2\ \text{sen }(\omega_0 t + \phi)$$

Reemplazando en (3):

$$2D_4\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) - (D_3 + D_4\ t)\omega_0^2\ \text{sen }(\omega_0 t + \phi) + \frac{k}{m}(D_3 + D_4\ t)\,\text{sen }(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{m}F_0\ \text{sen }(\omega_0 t)$$

pero $\omega_0 = \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, entonces:

$$2D_4\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) - (D_3 + D_4\ t)\omega_0^2\ \text{sen }(\omega_0 t + \phi) + \omega_0^2(D_3 + D_4\ t)\,\text{sen }(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{m}F_0\ \text{sen }(\omega_0 t)$$

es decir: $2D_4\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = \dfrac{1}{m}F_0\ \text{sen }(\omega_0 t) \Rightarrow \begin{cases} 2D_4\omega_0 = \dfrac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad D_4 = \dfrac{F_0}{2m\omega_0} \\ \cos(\omega_0 t + \phi) = \text{sen }(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \phi = -\pi/2 \end{cases}$

Con las constantes D_4 y ϕ así definidas se obtiene <u>una</u> solución particular para la ecuación del movimiento. Por lo tanto la constante D_3 puede ser cualquiera, elegimos $D_3 = 0$

Reemplazando $\omega_0 = \omega$ obtenemos $x_p(t) = \dfrac{F_0}{2m\,\omega}t\ \text{ sen }(\omega t - \pi/2) = -\dfrac{F_0}{2m\,\omega}t\ \cos\ (\omega t)$

Sabemos que la solución homogénea es la misma anterior
Por lo tanto: $x(t) = B'_1 \cos\ (\omega t) + B'_2\ \text{sen }(\omega t) - \dfrac{F_0}{2m\,\omega}t\ \cos\ (\omega t)$

Imponemos las condiciones iniciales:

$x(0) = B'_1 \cos\ (0) + B'_2\ \text{sen }(0) + 0 = \dfrac{F_0}{k}$ $\quad\Rightarrow\quad B'_1 = \dfrac{F_0}{k}$

$\dot{x}(0) = -B'_1\,\omega\,\text{sen }(0) + B'_2\,\omega \cos\ (0) - \dfrac{F_0}{2m\,\omega}\cos\ (0) + 0 = 0$ $\quad\Rightarrow\quad B'_2 = \dfrac{F_0}{2m\,\omega^2}$

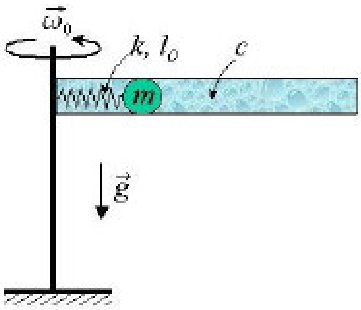
Entonces:

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\cos\ (\omega t) + \frac{F_0}{2m\omega^2}\text{sen}\ (\omega t) - \frac{F_0}{2m\omega} t\ \cos\ (\omega t)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\,\omega^2}\left[\ \frac{1}{2}\text{sen}\ (\omega\ t) + \left[1 - \frac{\omega t}{2}\right]\cos\ (\omega\ t)\ \right]$$

<u>EJEMPLO 2:</u>

<u>Control 1 FI21A-2 2004-2 (Problema 3)</u>



Una partícula P de masa m está en el interior de un tubo que gira en torno al eje vertical con velocidad angular ω_0. La partícula está unida al extremo de un resorte de constante $k = 2m\omega_0^2$ y largo natural l_o, como se muestra en la figura. Dentro del tubo existe un fluido cuyo roce viscoso con la partícula tiene la forma:

$$\vec{f}_{rv} = -c\,\vec{v}$$

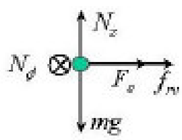
Inicialmente P se encuentra en reposo respecto del tubo, con el resorte en su largo natural.

a) Analice **<u>los tipos</u>** de solución posibles para el largo del resorte en función del tiempo, dependiendo de la relación entre los parámetros c , m y ω_0.

b) Si $\omega_0 = \frac{c}{m}$, determine la posición y velocidad de P en función de t, referidas a un sistema inercial.

<u>Solución:</u>

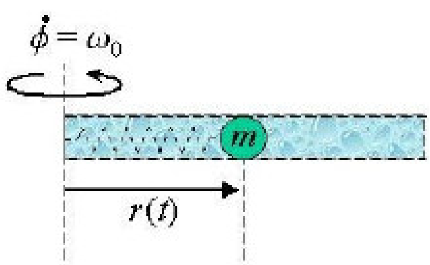
D.C.L.:



Las fuerzas que actúan sobre la partícula se indican en el DCL, donde:

$$\vec{F}_e = -k\,(r - l_0)\,\hat{r} \qquad \text{y} \qquad \vec{f}_{rv} = -c\,\dot{r}\,\hat{r}$$

a) <u>Tipos de solución para el largo del resorte</u>



Si utilizamos coordenadas polares con origen en el extremo del resorte que está en el eje vertical, el largo del resorte queda descrito por la variable r.

La ecuación del movimiento en estas coordenadas, en la dirección radial es:

según $\hat{r}$: $\quad m\,(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -c\,\dot{r}\ - k\,(r - l_0)$

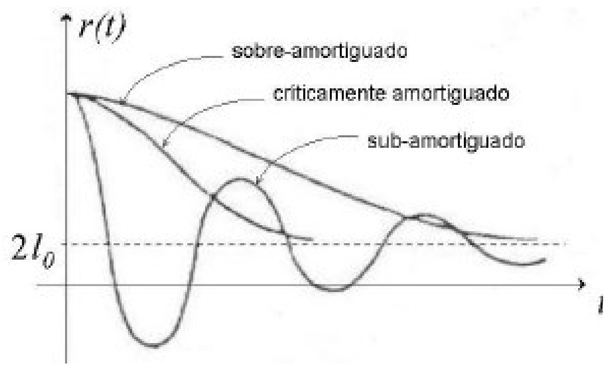
donde: $\dot{\phi} = cte = \omega_0$ y $k = 2\,m\,\omega_0^2$

Reemplazando y reordenando se llega a la EDO siguiente: $\ddot{r} + \frac{c}{m}\dot{r} + \omega_0^2\,r = 2\,\omega_0^2\,l_0$

cuya solución general es: $r(t) = \underbrace{A\,e^{s_1 t} + B\,e^{s_2 t}}_{r_h = \text{homogénea}} + \underbrace{2\,l_0}_{r_p = \text{particular}}$

donde: $s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$ (1)

Los tipos de solución para $r(t)$ dependen del término sub-radical de (1).
Recordando que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2\,m}}$, se distinguen tres casos:



i) $\frac{c}{2m} > \omega_0 \Rightarrow s_1, s_2$ son reales, distintas y negativas.

la solución tiene la forma: $r(t) = A_1\,e^{s_1 t} + B_1\,e^{s_2 t} + 2\,l_0$
=> movimiento sobreamortiguado
(el amortiguamiento prevalece sobre la elasticidad)

ii) $\frac{c}{2m} = \omega_0 \Rightarrow s_1, s_2$ son reales, iguales y negativas

la solución tiene la forma: $r(t) = (A_2 + B_2\,t)\,e^{st} + 2\,l_0$
=> amortiguamiento crítico
(el amortiguamiento se compensa con la elasticidad)

iii) $\frac{c}{2m} < \omega_0 \Rightarrow s_1, s_2$ son complejas conjugadas

la solución tiene la forma: $r(t) = e^{-\frac{c}{m}t}\left[A_3\cos\Omega t + B_3\,\text{sen}\,\Omega t\right] + 2\,l_0$, con $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$
=> movimiento subamortiguado (la elasticidad prevalece sobre el amortiguamiento)

b) Posición y velocidad de *P* c/r a sistema inercial

Usando el sistema de coordenadas polares definido en (a), la posición y velocidad de P, en función del tiempo, tienen la siguiente expresión:

$\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{r}$ (2.1).

$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\hat{r} + r(t)\,\dot{\phi}(t)\,\hat{\phi}$ (2.2).

En este caso $\omega_0 = \frac{c}{m} > \frac{c}{2m}$ => la solución es del tipo: $r(t) = e^{-\frac{c}{m}t}\left[A_3\cos\Omega t + B_3\,\text{sen}\,\Omega t\right] + 2\,l_0$

donde: $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{3}\,\frac{c}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\omega_0$

Condiciones iniciales:

$r(t=0) = l_0 \Rightarrow \quad A_3 + 2\,l_0 = l_0 \Rightarrow \quad A_3 = -l_0$

$\dot{r}(t=0) = 0 \Rightarrow -\frac{c}{m} A_3 + B_3\,\Omega = 0 \Rightarrow B_3 = -\frac{c}{m\,\Omega}\,l_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,l_0$

Entonces: $$r(t) = l_0 \left[2 - e^{-\omega_0 t} \left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t \right]\right] \qquad (3.1)$$

$$\dot{r}(t) = l_0\,\omega_0\,e^{-\omega_0 t} \left[2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\,t + \left[\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\,t \right] \qquad (3.2)$$

Reemplazando (3.1) en (2.1) obtenemos el vector posición en función del tiempo.

Reemplazando (3.1) y (3.2) en (2.2) y recordando que $\dot{\phi} = \omega_0$, obtenemos la velocidad en función del tiempo.