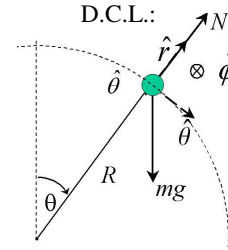


Solución Pregunta 1:

Las fuerzas que actúan sobre la partícula se indican en el DCL

Considerando la dirección en que actúan las fuerzas, utilizamos coordenadas esféricas

**a) Determinación de $v(\theta)$ y $a(\theta)$**

Por enunciado $r = R \equiv \text{cte}$, entonces, en estas coordenadas la velocidad y aceleración se escriben respectivamente:

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \hat{\theta} + R \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} \quad (1.1)$$

$$\vec{a} = \left[-R \dot{\theta}^2 - R \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] \hat{r} + \left[R \ddot{\theta} - R \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right] \hat{\theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{d}{dt} (R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) \hat{\phi} \quad (1.2)$$

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son: $\vec{N} = N \hat{r}$, $m\vec{g} = (-mg \cos \theta) \hat{r} + (mg \sin \theta) \hat{\theta}$

De esta forma obtenemos las ecuaciones escalares del movimiento

según \hat{r} : $N - mg \cos \theta = -m R \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - m R \dot{\theta}^2$ (2.1)

según $\hat{\theta}$: $mg \sin \theta = m R \ddot{\theta} - m R \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta$ (2.2)

según $\hat{\phi}$: $0 = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{d}{dt} (R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})$ (2.3)

De la ecuación en $\hat{\phi}$ tenemos que $\frac{d}{dt} (R^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0$, por lo que se concluye que $R^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$ es constante en el tiempo. Para evaluar esta cantidad notamos que en el instante inicial $\theta(t=0) = \theta_0 = \pi/3$ y conocemos la velocidad inicial, de donde determinamos $\dot{\phi}(t=0) = \dot{\phi}_0$.

Por enunciado $\vec{v}(t=0) = v_0 \hat{\phi}$

$$\Rightarrow v_0 \hat{\phi} = R \dot{\phi}_0 \sin \theta_0 \hat{\phi} \Rightarrow \dot{\phi}_0 = \frac{v_0}{\frac{\sqrt{3}}{2} R} \Rightarrow R^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta = R^2 \frac{2 v_0}{\sqrt{3} R} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \dot{\phi}(\theta) = \frac{\sqrt{3} v_0}{2 R \sin^2 \theta} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2.2), se obtiene: $\ddot{\theta} = \frac{3 v_0^2 \cos \theta}{4 R^2 \sin^3 \theta} + \frac{g}{R} \sin \theta$ (4)

Integramos aplicando las condiciones iniciales: $\int_0^{\dot{\theta}(\theta)} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{3 v_0^2}{4 R^2} \int_{\pi/3}^{\theta} \frac{d(\sin \theta)}{\sin^3 \theta} + \frac{g}{R} \int_{\pi/3}^{\theta} \sin \theta d\theta$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} + \frac{g}{2R} - \frac{3 v_0^2}{4 R^2 \sin^2 \theta} - \frac{g \cos \theta}{R} \quad (\dot{\theta}^2 \geq 0) \quad (5)$$

Reemplazando (5) y (3) en (1.1) obtenemos $\vec{v}(\theta)$

Reemplazando (5), (3) y (4) en (1.2) y recordando que $a_\phi = 0$, obtenemos $\vec{a}(\theta)$.

b) Valor del ángulo θ en el despegue

Reemplazando (5) y (3) en (2.1) y despejando N :

$$N = 2mg \cos \theta - \frac{mg}{2} - \frac{mv_0^2}{R}$$

Sea θ^* el ángulo para el cual la partícula se despegue de la superficie, entonces se debe cumplir que $N(\theta = \theta^*) = 0$.

de donde: $0 = 2mg \cos \theta^* - \frac{mg}{2} - \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow$

$$\theta^* = \arccos \left[\frac{1}{4} + \frac{v_0^2}{2gR} \right]$$