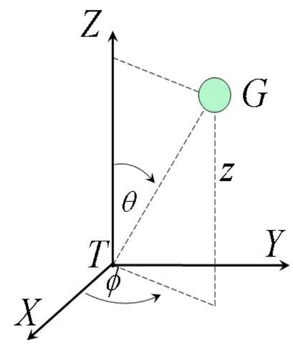
CONTROL N° 1

P 1

La técnica meteorológica de "globos pilotos" consiste en liberar un globo G inflado con Helio, cuya altura $z(t)$ se supone conocida. La posición del globo es seguida por un observador a través de un anteojo teodolito ubicado en el punto T, de tal manera de registrar los ángulos zenital ($\theta(t)$) y azimutal ($\phi(t)$) de la posición de G en cada instante. El objetivo de la técnica es deducir la velocidad horizontal del globo a partir de los datos de $z(t)$, $\theta(t)$ y $\phi(t)$.



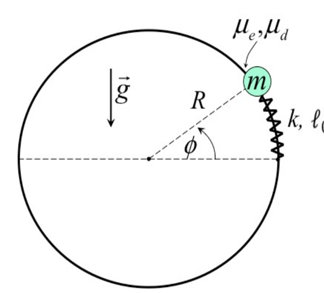
a) Determinar las componentes horizontales de la velocidad del globo $\dot{x}$ e $\dot{y}$ en función de z, θ, ϕ , $\dot{z}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$.

b) Si a partir de cierta altura la velocidad del globo es constante, con $\dot{x} = u_0$, $\dot{y} = v_0$ y $\dot{z} = w_0$, determine los valores a los cuales tienden los ángulos θ y ϕ cuando $t \to \infty$.

c) Para un globo que se mueve a altura constante Z, con $\dot{x} = u_0$ e $\dot{y} = v_0$ constantes, determine expresiones para $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ en función de u_0, v_0, θ, ϕ y Z. La práctica indica que para los observadores es muy difícil realizar el seguimiento del globo cuando éste por su trayectoria pasa justo por encima del punto T. Proponga una explicación cualitativa a este problema en base al resultado obtenido.

P 2

Una argolla de masa m se encuentra inserta en un aro vertical rugoso de radio R, unida al extremo de un resorte de constante elástica k y largo natural $\ell_0 = R$, el cual está enrollado a lo largo del aro, y cuyo otro extremo está fijo en el A como muestra la figura. Los coeficientes de roce estático y dinámico entre la argolla y el aro son μ_e y μ_d respectivamente. Determine:



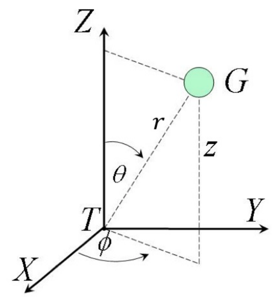
a) Las constantes k y μ_e tales que la argolla pueda permanecer en reposo en el rango $\pi/6 \leq \phi \leq \pi/3$.

b) La fuerza adicional $\vec{F} = F(\phi)\hat{\phi}$ que se debe aplicar a la partícula para que ella describa un movimiento con $\dot{\phi} = \omega_0$ en el rango $0 \leq \phi \leq \pi$, donde ω_0 es una constante conocida.

P 3

Una partícula de masa m es lanzada verticalmente hacia arriba con rapidez inicial $\boldsymbol{v_0}$. Además de su peso, actúa sobre la partícula un roce viscoso cuadrático de coeficiente C. Es decir: $\vec{f}_{rv} = -C\, v^2\, \hat{t}$. Determine el valor de v_0 tal que al pasar a la bajada por el punto de lanzamiento, su rapidez sea la mitad de su rapidez inicial.

Solución P1:



a) $z(t), \theta(t), \phi(t)$ son datos. De la geometría obtenemos:

$$z = r\cos\theta \Rightarrow r = z/\cos\theta \qquad (1)$$

$$x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi = z\tan\theta\cos\phi \qquad (2)$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi = z\tan\theta\,\text{sen}\,\phi \qquad (3)$$

Por lo tanto:

$$\dot{x} = \dot{z}\tan\theta\cos\phi + \frac{z\,\dot{\theta}\cos\phi}{\cos^2\theta} - z\tan\theta\,\text{sen}\,\phi\;\dot{\phi} \qquad (4)$$

$$\dot{y} = \dot{z}\tan\theta\,\text{sen}\,\phi + \frac{z\,\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi}{\cos^2\theta} + z\tan\theta\cos\phi\;\dot{\phi} \qquad (5)$$

b) de (2) y (3): $\tan\phi = \frac{y}{x}$; $\tan^2\theta = \frac{x^2+y^2}{z^2}$

Por enunciado: $\dot{x} = u_0$; $\dot{y} = v_0$; $\dot{z} = w_0$

$$\Rightarrow x(t) = x(0) + u_0\,t\,; \quad y(t) = y(0) + v_0\,t\,; \quad z(t) = z(0) + w_0\,t$$

Entonces:

$$\phi = \text{Arctan}\frac{y}{x} = \text{Arctan}\frac{y(0)+v_0\,t}{x(0)+u_0\,t} = \text{Arctan}\frac{(y(0)/t)+v_0}{(x(0)/t)+u_0} \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\phi(t) = \text{Arctan}\frac{v_0}{u_0}$$

$$\theta = \text{Arctan}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}} = \text{Arctan}\sqrt{\frac{((x(0)/t)+u_0)^2+((y(0)/t)+v_0)^2}{((z(0)/t)+w_0)^2}} \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\theta(t) = \text{Arctan}\sqrt{\frac{u_0^2+v_0^2}{w_0^2}}$$

c) $\dot{x} = u_0$; $\dot{y} = v_0$; $z(t) = Z = cte \Rightarrow \dot{z} = 0$. Las ecuaciones (4) y (5) se transforman en:

$$u_0 = \frac{Z\,\dot{\theta}\cos\phi}{\cos^2\theta} - Z\tan\theta\,\text{sen}\,\phi\;\dot{\phi} \qquad (6)$$

$$v_0 = \frac{Z\,\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi}{\cos^2\theta} + Z\tan\theta\cos\phi\;\dot{\phi} \qquad (7)$$

(6) * $\cos\phi$ + (7) * $\text{sen}\,\phi$ => $u_0\cos\phi + v_0\,\text{sen}\,\phi = \frac{Z\,\dot{\theta}\,(\cos^2\phi+\text{sen}^2\phi)}{\cos^2\theta}$ => $\dot{\theta} = \frac{(u_0\cos\phi+v_0\,\text{sen}\,\phi)\cos^2\theta}{Z}$

(7) * $\cos\phi$ - (6) * $\text{sen}\,\phi$ => $v_0\cos\phi - u_0\,\text{sen}\,\phi = Z\tan\theta\,(\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi)\dot{\phi}$ => $\dot{\phi} = \frac{v_0\cos\phi-u_0\,\text{sen}\,\phi}{Z\,\tan\theta}$

Cuando el globo pasa justo por encima del punto T, el ángulo θ toma el valor 0.

En esta situación $\tan\theta = 0$, por lo que el anteojo no puede seguir al globo, ya que requeriría un $\dot{\phi}$ infinito.

Solución P2:

a) En coordenadas polares, las fuerzas sobre la argolla son:

Fuerza elástica: $\vec{F}^e = -k(\ell - \ell_0)\,\hat{\phi} = -kR(\phi - 1)\,\hat{\phi}$

Fuerza de roce estático: $\vec{f}^{re} = f^{re}\,\hat{\phi}$, donde $f^{re} \gtrless 0$, con: $\|\vec{f}^{re}\| \leq \mu_e\,\|\vec{N}\|$

Peso: $m\vec{g} = mg(-\operatorname{sen}\phi\,\hat{\rho} - \cos\phi\,\hat{\phi})$

Reacción que le ejerce el aro: $\vec{N} = N\hat{\rho}$

Por lo tanto la condición de equilibrio significa lo siguiente:

$\hat{\rho}\rfloor \quad N - \operatorname{sen}\phi = 0$

$\hat{\phi}\rfloor \quad f^{re} - kR(\phi - 1) - mg\cos\phi = 0$, donde $f^{re} \gtrless 0$, con: $\|\vec{f}^{re}\| \leq \mu_e\,\|\vec{N}\|$

Se pide que la argolla pueda permanecer en reposo en el rango $\pi/6 \leq \phi \leq \pi/3$. Esto significa que:

- para $\phi = \pi/3$ ocurre la máxima fuerza de roce estático en la dirección $\hat{\phi}$ $(f^{re} = \mu_e\,\|\vec{N}\|\hat{\phi})$
- para $\phi = \pi/6$ ocurre la máxima fuerza de roce estático en la dirección $-\hat{\phi}$ $(f^{re} = -\mu_e\,\|\vec{N}\|\hat{\phi})$.

Es decir, se debe cumplir las siguientes condiciones:

$$\mu_e\, mg\operatorname{sen}(\pi/3) - kR((\pi/3) - 1) - mg\cos(\pi/3) = 0 \qquad (1)$$
$$-\mu_e\, mg\operatorname{sen}(\pi/6) - kR((\pi/6) - 1) - mg\cos(\pi/6) = 0 \qquad (2)$$

Lo que constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: μ_e y k.

Eliminamos la variable μ_e haciendo: (1) * $\operatorname{sen}(\pi/6)$ + (2) * $\operatorname{sen}(\pi/3)$

=> $-kR((\pi/3) - 1)\operatorname{sen}(\pi/6) + ((\pi/6) - 1)\operatorname{sen}(\pi/3)) - mg(\cos(\pi/3)\operatorname{sen}(\pi/6) + \cos(\pi/6)\operatorname{sen}(\pi/3)) = 0$

=> $-kR\left(\frac{(\pi/3)-1}{2} + \frac{(\pi/6)-1)\sqrt{3}}{2}\right) = mg\operatorname{sen}(\pi/3 + \pi/6) = mg$ => $k = \frac{2mg}{R(1-(\pi/3)+\sqrt{3}(1-(\pi/6)))}$

Eliminamos la variable k haciendo: (1) * $((\pi/6) - 1)$ – (2) * $((\pi/3) - 1)$

$$\mu_e\, mg[\operatorname{sen}(\pi/3)\,((\pi/6) - 1) + \operatorname{sen}(\pi/6)\,((\pi/3) - 1)] - mg[\cos(\pi/3)\,((\pi/6) - 1) - \cos(\pi/6)\,((\pi/3) - 1)] = 0$$

$$\mu_e = \frac{[\cos(\pi/3)((\pi/6)-1)-\cos(\pi/6)((\pi/3)-1)]}{[\operatorname{sen}(\pi/3)((\pi/6)-1)+\operatorname{sen}(\pi/6)((\pi/3)-1)]} = \frac{[(1/2)((\pi/6)-1)-(\sqrt{3}/2)((\pi/3)-1)]}{[(\sqrt{3}/2)((\pi/6)-1)+(1/2)((\pi/3)-1)]} = 0{,}7$$

b) Ahora se pide que la argolla se mueva con respecto al aro, entonces actúa la fuerza de roce dinámico. El movimiento es con $\dot{\phi} = cte = \omega_0$, entonces las ecuaciones del movimiento son:

$\hat{\rho}\rfloor \quad N - mg\operatorname{sen}\phi = m\,a_\rho = -mR\,\omega_0^2 \qquad (3) \quad$ => $N = mg\operatorname{sen}\phi - mR\,\omega_0^2$

$\hat{\phi}\rfloor \quad F(\phi) - \mu_d N - kR(\phi - 1) - mg\cos\phi = m\,a_\phi = 0 \qquad (4)$

Reemplazando N en(4) => $\vec{F}(\phi) = [\mu_d\,(mg\operatorname{sen}\phi - mR\,\omega_0^2) + kR(\phi - 1) + mg\cos\phi]\,\hat{\phi}$

Solución P3:

Planteamos las ecuaciones del movimiento en dos etapas: de subida y de bajada.

i) De subida: Parte desde que se lanza con $\vec{v} = v_0\,\hat{\jmath}$ hasta que se detiene en la altura máxima.
ii) De bajada: Parte desde la altura máxima con $v = 0$, y llega a la posición inicial con $\vec{v} = -(v_0/2)\,\hat{\jmath}$

De subida: $\hat{\jmath}\rfloor$ $\quad m\ddot{y} = -C\,\dot{y}^2 - mg$ (la fuerza de roce viscoso apunta según $-\hat{\jmath}$)

$$m\,\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -(C\dot{y}^2 + mg) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}\,d\dot{y}}{\frac{C}{m}\dot{y}^2 + g} = -dy$$

$$\int_{v_0}^{0} \frac{\frac{2C}{m}\dot{y}\,d\dot{y}}{\frac{C}{m}\dot{y}^2 + g} = -\frac{2C}{m}\int_0^H dy \quad \Rightarrow \quad \ln\left[\frac{g}{\frac{C}{m}v_0^2 + g}\right] = -\frac{2C}{m}H \qquad (1)$$

De bajada: $\hat{\jmath}\rfloor$ $\quad m\ddot{y} = C\,\dot{y}^2 - mg$ (la fuerza de roce viscoso apunta según $\hat{\jmath}$)

$$m\,\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = (C\dot{y}^2 - mg) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}\,d\dot{y}}{\frac{C}{m}\dot{y}^2 - g} = dy$$

$$\int_0^{v_0/2} \frac{\frac{2C}{m}\dot{y}\,d\dot{y}}{\frac{C}{m}\dot{y}^2 - g} = \frac{2C}{m}\int_H^0 dy \quad \Rightarrow \quad \ln\left[\frac{\frac{C}{4m}v_0^2 - g}{-g}\right] = -\frac{2C}{m}H \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) $\Rightarrow \ln\left[\frac{\frac{C}{4m}v_0^2 - g}{-g}\right] = \ln\left[\frac{g}{\frac{C}{m}v_0^2 + g}\right] \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{C}{4mg}v_0^2 = \frac{1}{\frac{C}{mg}v_0^2 + 1}$

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{C}{4mg}v_0^2\right]\left[\frac{C}{mg}v_0^2 + 1\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{mg}v_0^2 - \frac{C}{4mg}v_0^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{C}{mg}v_0^2\right]^2 = 0$$

Se busca la solución $v_0 \neq 0$, entonces: $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{C}{mg}v_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{mg}v_0^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{3mg}{C}}$