

Solución Ejercicio # 1

FI21A-2 Mecánica

23 de marzo de 2005

- a) Como el movimiento ocurre en la superficie de la esfera, tenemos que siempre $r = R$, entonces $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$ y por tanto no hay componente de \vec{v} en \hat{r} .

Para obtener la expresión de \vec{v} en coordenadas esféricas, podemos proyectar el V_0 , considerando que el ángulo con la horizontal es SIEMPRE $\pi/6$; que la dirección 'horizontal' corresponde a $\hat{\phi}$ (paralelos), y que la dirección 'vertical' a $\hat{\theta}$ (meridianos).

Por lo tanto, haciendo la proyección, obtenemos

$$\vec{V}_0 = \vec{v} = V_0 \sin(\pi/6) \hat{\theta} + V_0 \cos(\pi/6) \hat{\phi}$$

$$\vec{v} = \frac{V_0}{2} \hat{\theta} + \frac{V_0 \sqrt{3}}{2} \hat{\phi}$$

Ahora nos interesa obtener el $\theta(t)$. Para esto comparamos la expresión anterior con la forma general de \vec{v} en coordenadas esféricas:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}$$

En $\hat{\theta}$:

$$\frac{V_0}{2} = R \dot{\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{V_0}{2R}$$

De acá integramos considerando que $\theta(0) = \theta_0$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \frac{V_0}{2R} \int_0^t dt$$

Por lo tanto

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{V_0 t}{2R}$$

b) Ahora nos interesa re-expresar la aceleración en esféricas:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + (2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r \sin \theta \ddot{\phi}) \hat{\phi}$$

Pero ya vimos que $r = R, \dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$ y además ahora sabemos que $\dot{\theta} = V_0/2R$ y con ello $\ddot{\theta} = 0$. Sólo nos resta conocer $\dot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$.

De la misma forma que obtuvimos el $\theta(t)$, obtendremos el $\dot{\phi}$ comparando las expresiones de \vec{v} .

En $\hat{\phi}$:

$$\frac{V_0 \sqrt{3}}{2} = R \sin \theta \dot{\phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{3} V_0}{2R \sin \theta}$$

Derivando esto, obtenemos:

$$\ddot{\phi} = \frac{\sqrt{3} V_0^2}{4R^2} \frac{-\cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

Ahora podemos escribir una expresión de \vec{a} en función de θ :

$$\vec{a} = \left(-\frac{V_0^2}{4R} - \frac{3V_0^2}{4R}\right) \hat{r} + \left(-\frac{3V_0^2 \cos \theta}{4R \sin \theta}\right) \hat{\theta} + \left(\frac{V_0^2 \sqrt{3} \cos \theta}{2R \sin \theta} - \frac{V_0^2 \sqrt{3} \cos \theta}{4R \sin \theta}\right) \hat{\phi}$$

Y finalmente, ordenando un poco:

$$\vec{a} = -\frac{V_0^2}{R} \left(\hat{r} + \frac{3}{4 \tan \theta} \hat{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{4 \tan \theta} \hat{\phi}\right)$$