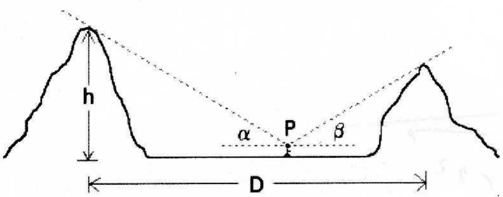
EJERCICIO 1
INTRODUCCION A LA FISICA NEWTONIANA

Profesor R. Arias

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
Martes 1 de Abril, 2014, Duración 1:30

- 1) (1.5) Una persona ubicada en el punto P observa dos montañas que la rodean, una a la derecha y otra a la izquierda. Sean $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ los ángulos de elevación, respectivamente (ver la figura). Si la montaña de la izquierda tiene una altura $\boldsymbol{h}$ y la separación entre las proyecciones de las cimas sobre el nivel de la superficie terrestre es $\boldsymbol{D}$, calcule la altura del otro monte.

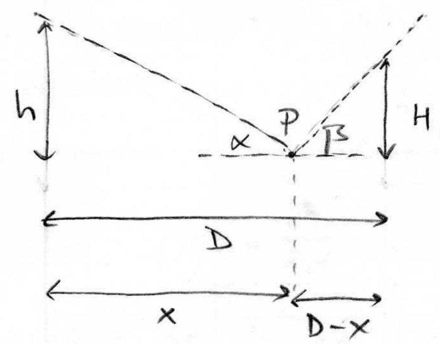


- 2) (3) Un auto parte del reposo en $\boldsymbol{t = 0}$ con una aceleración constante desconocida en una línea recta por $\boldsymbol{100m}$. Llega a una velocidad de $\boldsymbol{20m/s}$ y luego continúa a esta velocidad por $\boldsymbol{10s}$.
  - a) (0.5) Escriba ecuaciones para la posición y velocidad del auto en función del tiempo (sepárelas para los dos intervalos de tiempo relevantes).
  - b) (0.5) ¿Durante cuanto tiempo estuvo el auto acelerando?
  - c) (0.5) ¿Cual fue la magnitud de la aceleración en la parte b)?
  - d) (1.0) Grafique la aceleración vs. tiempo, velocidad vs. tiempo y posición vs. tiempo (durante toda la trayectoria, e indicando las unidades correctas en los ejes).
  - e) (0.5) ¿Cual fue la aceleración promedio (durante toda la trayectoria)?

- 3) (1.5) Calcule la velocidad instantánea $\boldsymbol{v(t)}$, dado que la posición es $\boldsymbol{x(t) = \sqrt{a^2 + (v_0 t)^2}}$ (utilice el proceso límite adecuado).

Pauta Ejercicio 1

1) Despreciamos la altura de la persona porque comparada con las alturas de las montañas es muy pequeña. Nos piden H.



Por trigonometría, $tg\,\alpha = \dfrac{h}{x} \Rightarrow x = \dfrac{h}{tg\,\alpha}$ (1)

$$tg\,\beta = \frac{H}{D-x} \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2)

$$\Rightarrow tg\,\beta = \frac{H}{D - h/tg\,\alpha}$$

$$\Rightarrow H = tg\,\beta\left(D - \frac{h}{tg\,\alpha}\right)$$

que es la altura del otro monte.

2) Ec. de Cinemática importantes:

(1) $X = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

(2) $V = V_0 + at$

(3) $V^2 = V_0^2 + 2ad$

(a) Un intervalo de tiempo relevante es desde $t=0$ hasta que el auto deja de aumentar su velocidad. Los siguientes 10 s son el otro intervalo de tiempo relevante.

Supongamos que el auto parte desde el origen del sistema de coordenadas.

Intervalo 1: $X = \frac{1}{2} a t^2$

$V = at$

Intervalo 2: $X = X_0 + V_0(t-10) = 100 + 20(t-10)$ $\quad 10 \le t \le 20$ s

$X = X_0 + V_0 t = 100 + 20t$ $\quad 0 \le t \le 10$ s

Ambas consideradas buenas respuestas

$V = 20$

(b) y
(c) Para determinar durante cuanto tiempo estuvo el auto acelerado conviene usar la ec (3),

$$V^2 = V_0^2 + 2ad$$

Es un dato que parte desde el reposo y por lo tanto $V_0 = 0$
Además, recorre 100 m, por lo tanto $d = 100$ m
y sabemos que su velocidad final es de 20 m/s $\Rightarrow V^2 = 20^2$
Despejando la aceleración,

$$a = \frac{V^2}{2d} = \frac{400}{2 \cdot 100} = 2 \ m/s^2$$

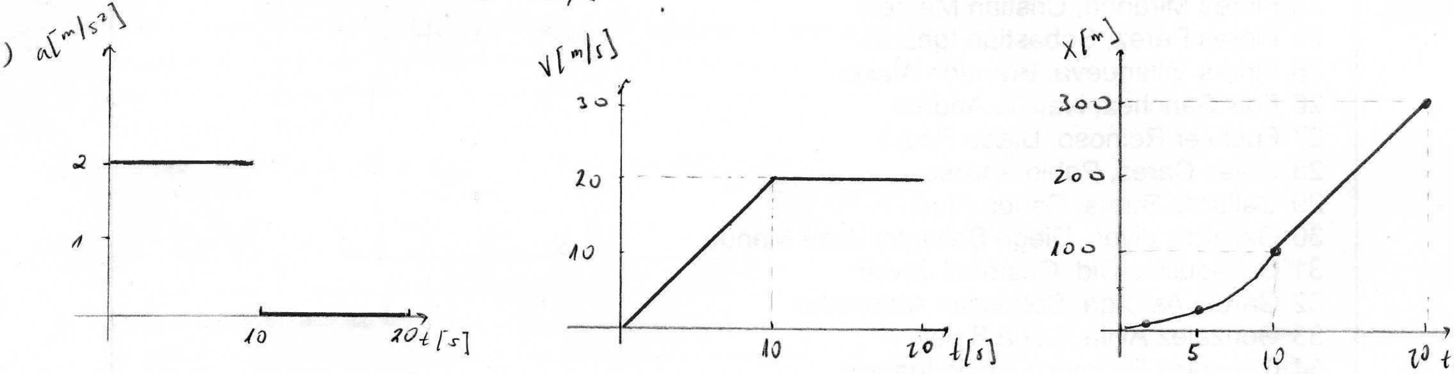
Es directo de la ec (2) obtener el tiempo:

$$V = \cancel{V_0}^{0} + at$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{V}{a} = \frac{20}{2} = 10 \ s$$

∴ El auto estuvo acelerado por 10 s y la magnitud de la aceleración fue de $2 \ m/s^2$.

(d)



Para graficar posición vs. tiempo, hagamos una pequeña tabla con distintos valores para X, los cuales en el primer intervalo vienen dados por
$X = \frac{1}{2} a t^2 = t^2$

t	0	2	5	10
x	0	4	25	100

Luego avanza con velocidad constante, $X = X_0 + V_0 (t - 10)$
$X = 100 + 20 (t - 10)$

$\Rightarrow$

t	10	20
x	100	300

(e) La aceleración promedio será

$$a_M = \frac{V_f - V_i}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{20} = 1 \ m/s^2$$

(3) $x(t)=\sqrt{a^2+(v_0 t)^2}$

La velocidad instantánea es la derivada con respecto al tiempo de la posición (cómo varía la posición a través del tiempo).

Sabemos que la derivada está definida como el límite,

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sqrt{a^2+v_0^2(t+\varepsilon)^2}-\sqrt{a^2+(v_0 t)^2}}{\varepsilon}$$

*Recuerden que la notación $x(t)$ o $x(t+\varepsilon)$ quiere decir que la posición x está evaluada en el tiempo t o $t+\varepsilon$, respectivamente.

$$\Rightarrow v(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sqrt{a^2+v_0^2t^2+v_0^2\varepsilon^2+2v_0^2t\varepsilon}-\sqrt{a^2+v_0^2t^2}}{\varepsilon}$$

Multiplicamos toda la expresión por uno, escrito como,

$$\frac{\sqrt{a^2+v_0^2t^2+v_0^2\varepsilon^2+2v_0^2t\varepsilon}+\sqrt{a^2+v_0^2t^2}}{\sqrt{a^2+v_0^2t^2+v_0^2\varepsilon^2+2v_0^2t\varepsilon}+\sqrt{a^2+v_0^2t^2}}$$

de tal manera de que en el numerador quede una suma por diferencia.

$$\Rightarrow v(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cancel{a^2}+\cancel{v_0^2t^2}+v_0^2\varepsilon^2+2v_0^2t\varepsilon-\cancel{a^2}-\cancel{v_0^2t^2}}{\varepsilon\left(\sqrt{a^2+v_0^2t^2+v_0^2\varepsilon^2+2v_0^2t\varepsilon}+\sqrt{a^2+v_0^2t^2}\right)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\underbrace{v_0^2\varepsilon}_{\to 0}+2v_0^2t}{\sqrt{a^2+v_0^2t^2+\underbrace{v_0^2\varepsilon^2}_{\to 0}+\underbrace{2v_0^2t\varepsilon}_{\to 0}}+\sqrt{a^2+v_0^2t^2}}$$

$$\Rightarrow v(t)=\frac{2v_0^2t}{2\sqrt{a^2+v_0^2t^2}}=\frac{v_0^2t}{\sqrt{a^2+v_0^2t^2}}$$ es la velocidad instantánea.