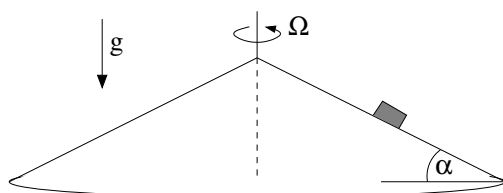


[P1] Un bloque de masa m reposa sobre el manto de un cono que forma un ángulo α respecto a la base, definido en la figura. Entre el bloque y el manto del cono hay roce estático caracterizado por un coeficiente de roce μ . El ángulo es pequeño ($\tan \alpha < \mu$) permitiendo que el bloque se mantenga en reposo con respecto al cono.

Si el cono gira en torno a su eje con una velocidad angular Ω y el bloque está a una distancia L del vértice del cono, determine el máximo valor de Ω para que el bloque **no** deslice.



Solución:

Se hace el DCL del cuerpo con ejes orientados tales que el eje x es paralelo al manto del cono, apuntando hacia abajo, y el eje y es perpendicular al manto del cono, apuntando hacia arriba. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso $m\vec{g}$, la normal \vec{N} y el roce estático \vec{F}_r . En los ejes indicados, las fuerzas se escriben

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_r \\ &= mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N\hat{y} - F_r\hat{x}\end{aligned}$$

El cuerpo se mueve en un movimiento circular uniforme, con aceleración centrípeta $\Omega^2 r$. El radio de giro es $r = L \cos \alpha$, de manera que en el sistema de ejes escogido la aceleración es

$$\vec{a} = -\Omega^2 L \cos \alpha (\cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y})$$

Entonces, la ley de Newton por ejes es:

$$\begin{aligned}\hat{x} &: -m\Omega^2 L \cos^2 \alpha = mg \sin \alpha - F_r \\ \hat{y} &: -m\Omega^2 L \cos \alpha \sin \alpha = -mg \cos \alpha + N\end{aligned}$$

De lo que se despeja N y F_r

$$\begin{aligned}F_r &= mg \sin \alpha + m\Omega^2 L \cos^2 \alpha \\ N &= mg \cos \alpha - m\Omega^2 L \cos \alpha \sin \alpha\end{aligned}$$

Para que no deslice la condición es que $F_r \leq \mu N$, se manera que el valor máximo de Ω se obtiene imponiendo la igualdad

$$mg \sin \alpha + m\Omega^2 L \cos^2 \alpha = \mu (mg \cos \alpha - m\Omega^2 L \cos \alpha \sin \alpha)$$

relación de la que se despeja

$$\Omega = \sqrt{\frac{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{L \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}} = \sqrt{\frac{g(\mu - \tan \alpha)}{L \cos \alpha (1 + \mu \tan \alpha)}}$$

Puntajes:

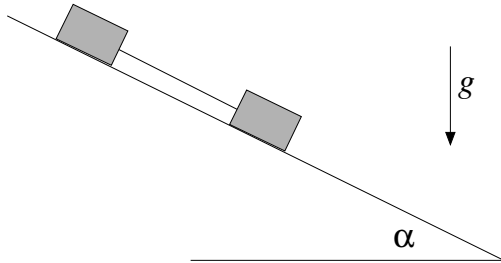
Fuerzas y DCL: 2 pts

Aceleración y descomposición en ejes: 2 pts

Newton y condición crítica: 2pts

- [P2] Dos bloques de masa m que están unidos por una cuerda ideal están apoyados sobre un plano inclinado en un ángulo α . El bloque de abajo puede deslizar sin roce por el plano, mientras que el bloque de arriba experimenta roce cinético caracterizado por un coeficiente de roce μ .

Calcule la tensión de la cuerda cuando el sistema está cayendo.



Solución:

Se escogen ejes orientados tales que el eje x es paralelo al plano, apuntando hacia abajo, y el eje y es perpendicular al plano, apuntando hacia arriba. Llamemos “1” al cuerpo de abajo y “2” al de arriba.

Sobre el cuerpo “1” actúa el peso $m\vec{g}$, la normal \vec{N}_1 y la tensión \vec{T}_1 . En los ejes indicados, las fuerzas se escriben

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 \\ &= mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N_1 \hat{y} - T \hat{x} \end{aligned}$$

La aceleración del cuerpo es sólo según el eje x , de manera que la ley de Newton es

$$ma_1 \hat{x} = mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N_1 \hat{y} - T \hat{x}$$

de la que se obtienen las siguientes ecuaciones

$$ma_1 = mg \sin \alpha - T \quad (1)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N_1 \quad (2)$$

Sobre el cuerpo “2” actúa el peso $m\vec{g}$, la normal \vec{N}_2 , la tensión \vec{T}_2 y la fuerza de roce dinámico $\vec{F}_r = -\mu N_2 \hat{x}$. En los ejes indicados, las fuerzas se escriben

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_r \\ &= mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N_2 \hat{y} + T \hat{x} - \mu N_2 \hat{x} \end{aligned}$$

donde hay que notar que el signo de la tensión es diferente al de la partícula “1” por acción y reacción.

La aceleración del cuerpo es sólo según el eje x , de manera que la ley de Newton es

$$ma_2 \hat{x} = mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N_2 \hat{y} + T \hat{x} - \mu N_2 \hat{x}$$

de la que se obtienen las siguientes ecuaciones

$$ma_2 = mg \sin \alpha + T - \mu N_2 \quad (3)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N_2 \quad (4)$$

Como los cuerpos están unidos por una cuerda, las aceleraciones son iguales $a_1 = a_2 = a$. Con esto, el sistema de ecuaciones (1)-(4) se resuelve dando

$$N_1 = mg \cos \alpha$$

$$N_2 = mg \cos \alpha$$

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha / 2$$

$$T = \mu mg \cos \alpha / 2$$

Puntajes:

DCL 1: 2 pts

DCL 2: 2 pts

Resultado final: 2 pts