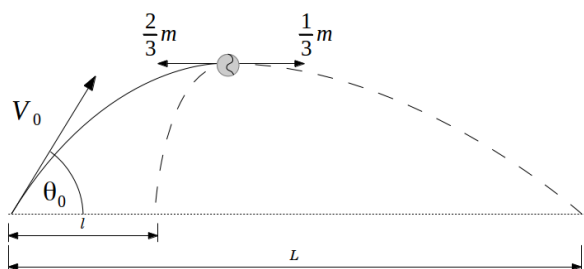


EXAMEN
INTRODUCCION A LA FISICA NEWTONIANA

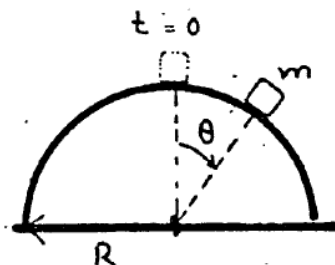
Profesores F. Guzmán, S. López, A. Escala, C. Romero,
H. Arellano, N. Zamorano, R. Soto, R. Arias

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
Sábado 12 de Julio 2014, Duración 3:00 horas

- 1) Se lanza un proyectil con una rapidez inicial V_0 , formando un ángulo de θ_0 con respecto a la horizontal. En el punto más alto de su vuelo, el proyectil explota rompiéndose en dos partes, una de las cuales tiene el doble de masa que la otra (ver la figura). Los dos fragmentos salen inicialmente despedidos en la dirección horizontal (como se indica en la figura), y aterrizan simultáneamente. Si el fragmento más ligero aterriza a una distancia L del punto de lanzamiento, determine la posición l donde aterrizará el otro fragmento.

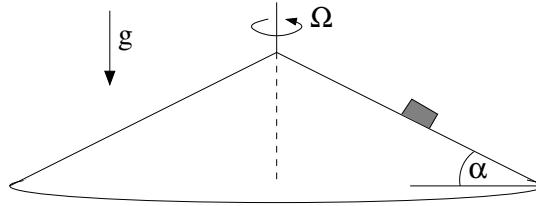


- 2) Un profesor viaja al interior de un ascensor que sube con velocidad constante. En un descuido al profesor se le escapan las llaves de su mano (simplemente las suelta). Al tocar el piso del ascensor las llaves se encuentran a la misma altura que en el instante en que se desprendieron de las manos del profesor (con respecto a un sistema fijo en tierra). En un mismo gráfico ilustre cualitativamente la altura versus tiempo de las llaves y del piso del ascensor con respecto al sistema fijo en tierra. No desprecie la gravedad, y dese los datos que le parezcan relevantes.
- 3) Un cuerpo pequeño, de masa m , parte del reposo desde la parte superior de una superficie cilíndrica lisa de radio R (la superficie cilíndrica está fija). Luego se desliza sin fricción como se muestra en la figura. Determine el valor del ángulo θ para el cual el cuerpo pierde contacto con la superficie.



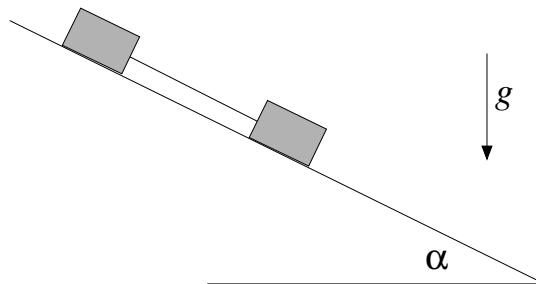
- 4) Un bloque de masa m reposa sobre el manto de un cono que forma un ángulo α respecto a la base, definido en la figura. Entre el bloque y el manto del cono hay roce estático caracterizado por un coeficiente de roce μ . El ángulo es pequeño ($\tan \alpha < \mu$) permitiendo que el bloque se mantenga en reposo con respecto al cono.

Si el cono gira en torno a su eje con una velocidad angular Ω y el bloque está a una distancia L del vértice del cono, determine el máximo valor de Ω para que el bloque **no** se deslice.

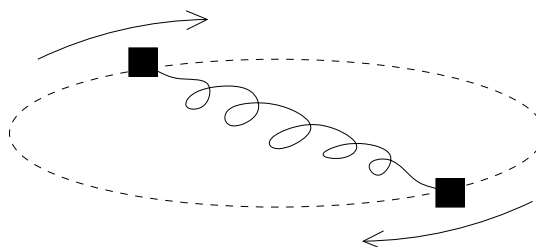


- 5) Dos bloques de masa m , que están unidos por una cuerda ideal, están apoyados sobre un plano inclinado en un ángulo α . El bloque de abajo puede deslizarse sin roce por el plano, mientras que el bloque de arriba experimenta roce cinético descrito por un coeficiente de roce μ .

Calcule la tensión de la cuerda cuando el sistema está cayendo.



- 6) Considere dos cubos idénticos, cada uno de masa m , los cuales se unen mediante un resorte ideal de constante elástica k y longitud natural L_0 . El sistema se hace rotar sobre una mesa horizontal pulida de forma tal que la distancia L entre los cubos se mantiene invariable en el tiempo (con $L > L_0$), con su centro de masas en reposo. Determine la velocidad angular del sistema y su energía mecánica total.



P1

La explosión es interna $\Rightarrow$ la gravedad es la única fuerza externa al sistema

$$\Rightarrow m \vec{a}_{cm} = m \vec{g}$$

cuya solución es:

$$x_{cm}(t) = x(0) + v_x(0)t = v_0 \cos \theta_0 t$$

$$z_{cm}(t) = z(0) + v_z(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando aterrizan los fragmentos en t^* : ① $x_{cm}(t^*) = v_0 \cos \theta_0 t^*$

$$② 0 = v_0 \sin \theta_0 t^* - \frac{1}{2}gt^{*2}$$

$$② \Rightarrow v_0 \sin \theta_0 t^* = \frac{1}{2}gt^{*2} \Rightarrow t^* = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$$

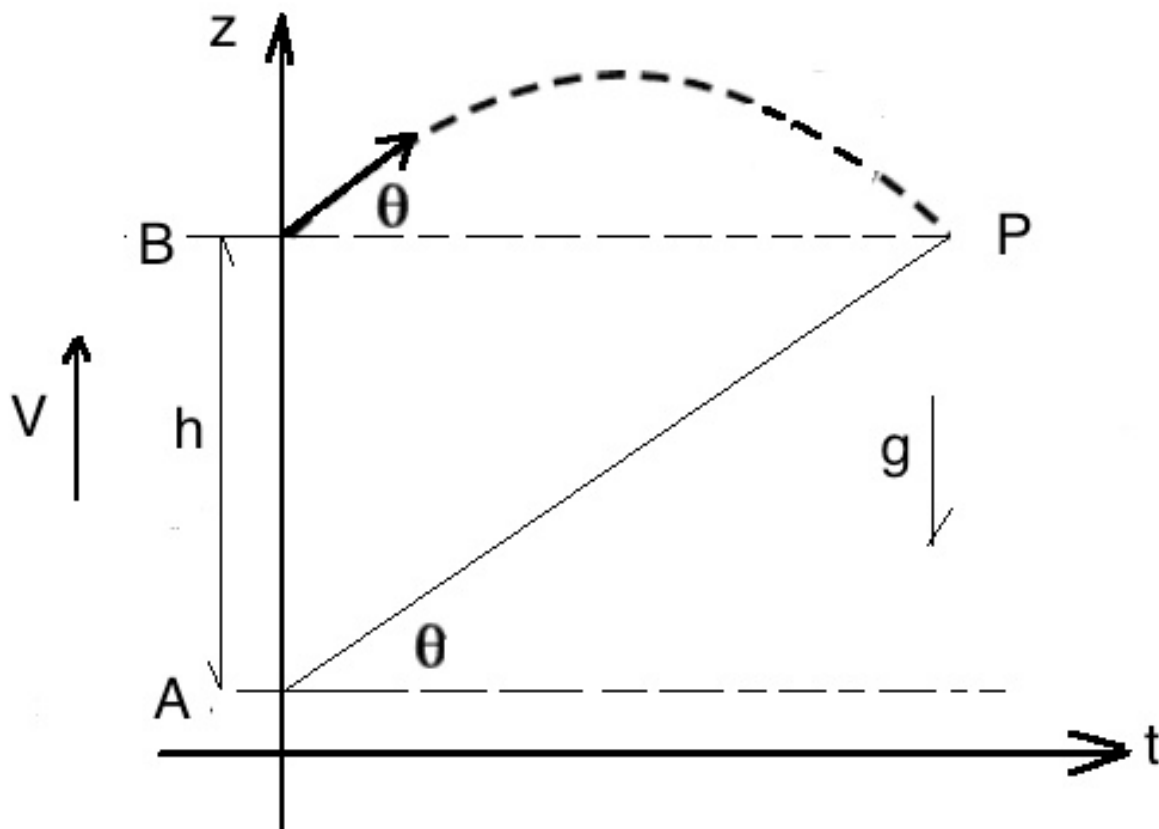
$$\text{en ①} \Rightarrow \boxed{x_{cm}(t^*) = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}}$$

Además, de la definición de CM:

$$\vec{R}_{cm}(t^*) = \frac{1}{m} \left(\frac{2}{3}m l \hat{x} + \frac{1}{3}m L \hat{x} \right) = x_{cm}(t^*) \hat{x} = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g} \hat{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}l + \frac{L}{3} = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g} \Rightarrow \boxed{l = \frac{3v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g} - \frac{L}{2}}$$

Solución problema #2 Examen 2014 (NZ)



El sistema de referencia dibujado está fijo al edificio donde se ubica el ascensor, Z es la altura y t el tiempo. La explicación que sigue está referida a este sistema.

AB es la altura inicial de las llaves con respecto al piso del ascensor.

Al soltar las llaves, éstas tienen la velocidad del ascensor V y siguen una trayectoria parabólica (línea a trazos). Como nos indican, al tocar el piso llegan al mismo punto desde donde se soltaron, este punto **P**, corresponde a la horizontal que pasa por **B**. En ese mismo instante el piso del ascensor **A** debe llegar al punto **P**.

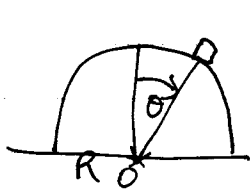
Este es el gráfico pedido. La tangente del ángulo θ representa la velocidad inicial de las llaves, que es la misma del gráfico de la velocidad del piso del ascensor.

La puntuación es 7, 4 ó un 5 y 1.0

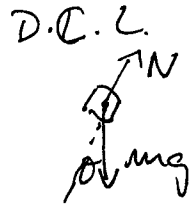
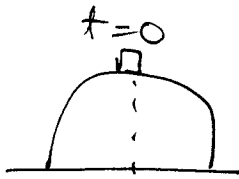
Un 4 ó un 5, corresponde a un gráfico correcto pero una explicación con algún error o poco clara. Cualquier error en el gráfico corresponde a 1.0.

Un observador en el ascensor no tiene idea de la coincidencia ocurrida. Sólo ve que las llaves caen al piso. Es un sistema inercial.

Pauta P.3 Examen.



$\downarrow g$



Conservación de energía:

$$E_0 = mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta \quad (1)$$

2ª Ley de Newton y aceleración centrípeta:

$$ma_c = -m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta \quad (2)$$

Condición de despegue: $N=0$ (3)

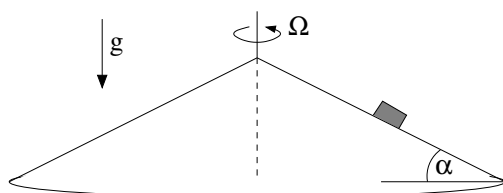
$$(2)/(3) \Rightarrow \frac{v_*^2}{R} = g\cos\theta_* \quad (4)$$

$$(4) \text{ en } (1) \Rightarrow mgR = \frac{1}{2}mgR\cos\theta_* + mgR\cos\theta_*$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_* = 2/3} \quad (5)$$

[P1] Un bloque de masa m reposa sobre el manto de un cono que forma un ángulo α respecto a la base, definido en la figura. Entre el bloque y el manto del cono hay roce estático caracterizado por un coeficiente de roce μ . El ángulo es pequeño ($\tan \alpha < \mu$) permitiendo que el bloque se mantenga en reposo con respecto al cono.

Si el cono gira en torno a su eje con una velocidad angular Ω y el bloque está a una distancia L del vértice del cono, determine el máximo valor de Ω para que el bloque **no** deslice.



Solución:

Se hace el DCL del cuerpo con ejes orientados tales que el eje x es paralelo al manto del cono, apuntando hacia abajo, y el eje y es perpendicular al manto del cono, apuntando hacia arriba. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso $m\vec{g}$, la normal $\vec{N}$ y el roce estático $\vec{F}_r$. En los ejes indicados, las fuerzas se escriben

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_r \\ &= mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N\hat{y} - F_r\hat{x}\end{aligned}$$

El cuerpo se mueve en un movimiento circular uniforme, con aceleración centrípeta $\Omega^2 r$. El radio de giro es $r = L \cos \alpha$, de manera que en el sistema de ejes escogido la aceleración es

$$\vec{a} = -\Omega^2 L \cos \alpha (\cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y})$$

Entonces, la ley de Newton por ejes es:

$$\begin{aligned}\hat{x} &: -m\Omega^2 L \cos^2 \alpha = mg \sin \alpha - F_r \\ \hat{y} &: -m\Omega^2 L \cos \alpha \sin \alpha = -mg \cos \alpha + N\end{aligned}$$

De lo que se despeja N y F_r

$$\begin{aligned}F_r &= mg \sin \alpha + m\Omega^2 L \cos^2 \alpha \\ N &= mg \cos \alpha - m\Omega^2 L \cos \alpha \sin \alpha\end{aligned}$$

Para que no deslice la condición es que $F_r \leq \mu N$, se manera que el valor máximo de Ω se obtiene imponiendo la igualdad

$$mg \sin \alpha + m\Omega^2 L \cos^2 \alpha = \mu (mg \cos \alpha - m\Omega^2 L \cos \alpha \sin \alpha)$$

relación de la que se despeja

$$\Omega = \sqrt{\frac{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{L \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}} = \sqrt{\frac{g(\mu - \tan \alpha)}{L \cos \alpha (1 + \mu \tan \alpha)}}$$

Puntajes:

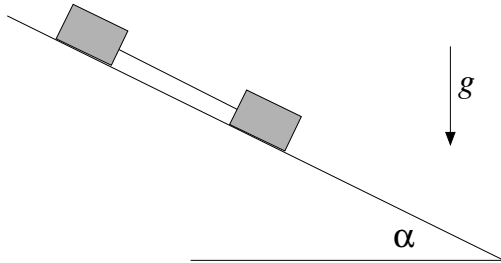
Fuerzas y DCL: 2 pts

Aceleración y descomposición en ejes: 2 pts

Newton y condición crítica: 2pts

- [P2] Dos bloques de masa m que están unidos por una cuerda ideal están apoyados sobre un plano inclinado en un ángulo α . El bloque de abajo puede deslizar sin roce por el plano, mientras que el bloque de arriba experimenta roce cinético caracterizado por un coeficiente de roce μ .

Calcule la tensión de la cuerda cuando el sistema está cayendo.



Solución:

Se escogen ejes orientados tales que el eje x es paralelo al plano, apuntando hacia abajo, y el eje y es perpendicular al plano, apuntando hacia arriba. Llamemos “1” al cuerpo de abajo y “2” al de arriba.

Sobre el cuerpo “1” actúa el peso $m\vec{g}$, la normal $\vec{N}_1$ y la tensión $\vec{T}_1$. En los ejes indicados, las fuerzas se escriben

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 \\ &= mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N_1 \hat{y} - T \hat{x} \end{aligned}$$

La aceleración del cuerpo es sólo según el eje x , de manera que la ley de Newton es

$$ma_1 \hat{x} = mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N_1 \hat{y} - T \hat{x}$$

de la que se obtienen las siguientes ecuaciones

$$ma_1 = mg \sin \alpha - T \quad (1)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N_1 \quad (2)$$

Sobre el cuerpo “2” actúa el peso $m\vec{g}$, la normal $\vec{N}_2$, la tensión $\vec{T}_2$ y la fuerza de roce dinámico $\vec{F}_r = -\mu N_2 \hat{x}$. En los ejes indicados, las fuerzas se escriben

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_r \\ &= mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N_2 \hat{y} + T \hat{x} - \mu N_2 \hat{x} \end{aligned}$$

donde hay que notar que el signo de la tensión es diferente al de la partícula “1” por acción y reacción.

La aceleración del cuerpo es sólo según el eje x , de manera que la ley de Newton es

$$ma_2 \hat{x} = mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) + N_2 \hat{y} + T \hat{x} - \mu N_2 \hat{x}$$

de la que se obtienen las siguientes ecuaciones

$$ma_2 = mg \sin \alpha + T - \mu N_2 \quad (3)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N_2 \quad (4)$$

Como los cuerpos están unidos por una cuerda, las aceleraciones son iguales $a_1 = a_2 = a$. Con esto, el sistema de ecuaciones (1)-(4) se resuelve dando

$$N_1 = mg \cos \alpha$$

$$N_2 = mg \cos \alpha$$

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha / 2$$

$$T = \mu mg \cos \alpha / 2$$

Puntajes:

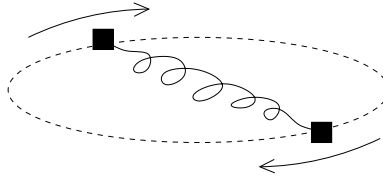
DCL 1: 2 pts

DCL 2: 2 pts

Resultado final: 2 pts

Problema resorte

Considere dos cubos idénticos, cada uno de masa m , los cuales se unen mediante un resorte ideal de constante elástica k y longitud natural L_0 . El sistema se hace rotar sobre una mesa horizontal pulida de forma tal que la distancia L entre los cubos se mantiene invariable el tiempo, con su centro de masas en reposo. Determine la velocidad angular del sistema y su energía mecánica total.



SOLUCION:

El movimiento de cada cubo es circunferencial de radio $r = L/2$. La elongación del resorte es $\delta = L - L_0$. Se aplica Newton a solo uno de los cubos, componente radial del movimiento:

$$F_r = ma_r \Rightarrow -k\delta = -m\omega^2 r \Rightarrow k(L - L_0) = m\omega^2(L/2).$$

Despejamos la velocidad angular

$$\omega = \sqrt{\frac{2k(L - L_0)}{mL}}$$

Para la energía mecánica se suman las energías cinéticas de cada partícula y la potencial:

$$E = K + U = 2 \times \frac{1}{2}m(\omega r)^2 + \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$$

Sustituyendo valor de ω y simplificando se obtiene

$$E = \frac{1}{2}k(L - L_0)(2L - L_0)$$

PUNTUACION/DESCUENTOS:

+3Pts determinación de ω +3Pts determinación de E .

-2Pts valor incorrecto del radio del movimiento (Ej. $r = L$)

-2Pts valor incorrecto de la fuerza del resorte (Ej. $(L - L_0)/2$).