

CC3101 - Matemáticas Discretas para la Computación**Profesor:** Pablo Barceló**Auxiliar:** Christian von Borries**Auxiliar N°7**

4 de Junio de 2014

Resumen

- Un grafo se dice **planar** si se puede dibujar en el plano sin cruzar arcos.
- Si $G = (V, E)$ es un grafo planar y conexo, una **región** es una sección del plano rodeado por aristas (incluyendo la región externa no acotada). Si llamamos r la cantidad de regiones, el siguiente resultado se conoce como **fórmula de Euler**:

$$r = |E| - |V| + 2$$

- Como corolarios de la fórmula anterior se puede concluir que, si $G = (V, E)$ es planar y conexo entonces
 - Si $|V| \geq 3$ entonces $|E| \leq 3|V| - 6$.
 - G tiene un vértice v que cumple $\deg(v) \leq 5$.
- Una **coloración** de un grafo G en n colores es una función $f : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que para cada par de vértices u y v vecinos se tiene que $f(u) \neq f(v)$.
- Para un grafo G definimos su **número cromático** de un grafo $\chi(G)$ como el mínimo número de colores necesarios para colorear G .
- (Teorema de los cuatro colores) Si G es planar, $\chi(G) \leq 4$.
- (Teorema de Kuratowski) Un grafo G es planar ssi no contiene un subgrafo homeomórfico a $K_{3,3}$ ni un subgrafo homeomórfico a K_5 .
- Un **árbol** es un grafo conexo acíclico. Si $G = (V, E)$ es árbol, entonces $|E| = |V| - 1$.
- G es árbol ssi para cada par de nodos existe un único camino que los conecta.
- $G = (V, E)$ es árbol ssi se cumplen a menos dos de las siguientes propiedades:
 - G es conexo.
 - G es acíclico.
 - $|E| = |V| - 1$.
- Un **spanning tree** de un grafo G es un subgrafo de G que es árbol y contiene todos los nodos de G . G tiene un spanning tree ssi G es conexo.

P1) Sea $G = (V, E)$ grafo conexo. Muestre que si $|E| = |V| + 1$, entonces G es planar.

P2) Sea $G = (V, E)$ grafo y $v_1 v_2 \dots v_n$ un orden en sus vértices. Consideremos el siguiente algoritmo para encontrar una coloración de G .

Algoritmo 1 COLOREO-GLOTÓN($G, v_1 \dots v_n$)

for $i := 1 \dots n$ **do**

Colorear v_i con el número más pequeño tal que ningún vecino de v_i tiene ese color.

end for

- a) Muestre que si el grado máximo de G es $\Delta(G)$, entonces COLOREO-GLOTÓN usará a lo más $\Delta(G) + 1$ colores.
- b) Muestre que para cada n existe un grafo G y un orden en sus vértices tal que G es 2-coloreable, pero el algoritmo colorea G con más de n colores.
- c) Muestre que siempre existe un orden en los vértices $v_1 \dots v_n$ tal que COLOREO-GLOTÓN($G, v_1 \dots v_n$) entrega una coloración en $\chi(G)$ colores.

P3) Un grafo G se dice **planar exterior** si puede ser dibujado en el plano de tal forma que todos sus vértices son adyacentes a la región no acotada. Suponga para esta pregunta que G es planar exterior.

- a) Una **triangulación** de G es un grafo planar exterior G' tal que $G \subseteq G'$ y si agrego un arco más a G' deja de ser planar exterior. Muestre que G siempre admite una triangulación G' y que todas sus regiones salvo la externa son triángulos.
- b) Muestre que G siempre contiene un vértice de grado menor o igual que dos.
- c) Muestre que si $|V| \geq 2$, $|E| \leq 2|V| - 3$. ¿Es ajustada esta cota?
- d) Muestre que G siempre es 3-coloreable.
- e) (Problema de la galería de arte) Las paredes de una galería de arte forman un polígono simple de n vértices. El problema de la galería de arte consiste en colocar guardias en algunos puntos estratégicos para que puedan supervisar toda la galería. (Suponga que los guardias ven en todas las direcciones, pero su visión no atraviesa las paredes de la galería.) Demuestre el siguiente teorema:

Teorema de Chvátal de la galería del arte: Siempre se puede solucionar el problema de la galería del arte con $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias.

P4) Muestre que G es bosque ssi no contiene un subgrafo homeomórfico a un triángulo.

P5) Sea $G = (V, E)$ grafo conexo y $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función de peso de sus arcos. El problema del spanning tree de peso mínimo consiste en encontrar un spanning tree T de G que minimice $\sum_{e \in T} w(e)$. Muestre que el siguiente algoritmo encuentra un spanning tree de peso mínimo:

Algoritmo 2 ALGORITMO DE KRUSKAL

Ordenar los arcos por peso $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$

$E(T) \leftarrow \emptyset$

for $i:=1 \dots m$ **do**

if $E(T) \cup e_i$ no contiene un ciclo **then**

$E(T) \leftarrow E(T) \cup e_i$

end if

end for
