CC3101 - Matemáticas Discretas para la Computación
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliar: Christian von Borries

Auxiliar N°6

13 de Mayo de 2014

Resumen y Terminología

- Un **grafo** es un par (V, E) donde V es un conjunto finito (llamados los vértices) y $E \subseteq V \times V$ (llamados arcos).
- Un **loop** es un arco que va de un vértice a sí mismo, o sea es un arco (v, v).
- Un grafo sin loops en el que para cada par $(u, v) \in V \times V$, $(u, v) \in E \implies (v, u) \in E$ se denomina un grafo **simple**. En general, siempre cuando hablamos de grafos, estamos hablando de grafos simples, a menos que se especifique lo contrario o sea obvio del contexto.
- Los nodos u y v son adyacentes o vecinos si $(u, v) \in E$.
- Para un nodo v, $\deg(v)$ es la cantidad de vecinos de v, llamado el **grado** de v.
- **Teorema de los saludos**: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.
- Un grafo (V, E) se dice bipartito si se puede particionar V en conjuntos L y R tal que cada arco en E conecta nodos de L y R.
- Un **subgrafo** de un grafo G es un grafo $G' = (V', E')$ con $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.
- Un camino es una secuencia de arcos $e_1, \ldots, e_k$ tal que existen nodos $v_1, \ldots, v_{k+1}$ tal que $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3), \ldots, e_k = (v_k, v_{k+1})$. Decimos que el camino es **simple** si no se repiten arcos y es un circuito si $v = u$.
- Un grafo G se dice **conexo** si para cada par de vértices existe un camino que los conecta.

P1) Demuestre que en un grafo simple siempre existen al menos dos nodos con el mismo grado.

P2) a) En un salón se encuentran 15 mujeres y una cantidad desconocida de hombres. Cada hombre saluda a exactamente 6 mujeres y cada mujer saluda a exactamente 8 hombres. ¿Cuántos hombres hay en el salón?

b) Un grafo se dice k-regular si para cada vértice v se tiene que $\deg(v) = k$. Sea $G = (L, R, E)$ grafo bipartito k-regular, demuestre que $|L| = |R|$.

P3) Sea $G = (V, E)$ grafo simple. Definimos $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg(v)$, el grado mínimo en G. Muestre que todo grafo G contiene un camino de largo $\delta(G)$ que pasa solo por nodos distintos.

P4) Sea $G = (V, E)$ grafo. Demuestre que G es conexo o su complemento $\bar{G}$ es conexo. (Recuerdo: $\bar{G} = (V, \bar{E})$.)

P5) Muestre que si $G = (V, E)$ es 2-regular (o sea todo vértice tiene grado 2), entonces cada componente conexa del grafo es un ciclo.

P6) a) Sea $G = (L, R, E)$ un grafo bipartito y sea P un camino en G que pasa solo por nodos distintos. Si $|P|$ es el largo de P, muestre que $|P| \leq 2 \min\{|L|, |R|\}$. ¿Es ajustada esta cota?

b) Suponga que tenemos un tablero de ajedrez (de 8×8). Su amigo lo desafía al siguiente juego: Le da dos reyes, uno blanco y uno negro, que tiene que colocar en posiciones distintas del tablero. Un turno consiste en elegir uno de los reyes y moverlo hacia arriba, abajo, derecha o izquierda. No pueden quedar ambos reyes en la misma posición. Una *configuración* es un par ordenado $((i_1, i_2), (i_3, i_4))$ tal que el rey blanco está en (i_1, i_2) y el rey negro en (i_3, i_4). Usted gana si pasa por todas las configuraciones exactamente una vez. ¿Puede ganar este juego?