

CC3101 - Matemáticas Discretas para la Computación**Profesor:** Pablo Barceló**Auxiliar:** Christian von Borries**Auxiliar N°5**

30 de Abril de 2014

P1) En esta pregunta estudiaremos los números de Catalan. Son una sucesión que aparece en varios problemas de conteo.

a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Muestre que los siguientes números son todos iguales:

- La cantidad de strings de largo $2n$ con el alfabeto $\{ (,) \}$ tal que los paréntesis están bien balanceados.
- La cantidad de sucesiones $a_1, \dots, a_{2n}$ con coeficientes en $\{1, -1\}$ tal que para $k = 1, \dots, 2n - 1$ $\sum_{i=1}^k a_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 0$.
- Caminos en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con movimientos $(+0, +1)$ y $(+1, +0)$ partiendo de $(0, 0)$ y terminando en (n, n) , pero sin pasar por debajo de la recta $x = y$.
- Las particiones de $\{1, \dots, n\}$ que no se cruzan: Una partición se dice que cruza si existen a, b, c, d tales que $a \leq b \leq c \leq d$, a y c están en un bloque de la partición y b y d están en otro bloque de la partición.
- La cantidad de permutaciones $a_1, \dots, a_n$ de $\{1, \dots, n\}$ tales que no existe $i < j < k$ que cumplan $a_i > a_j > a_k$.

(Y la lista sigue: En <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catalan.pdf> hay 66 objetos combinatoriales que cuentan lo mismo.)

b) Al número anterior lo llamamos C_n , el n -ésimo número de Catalán. Muestre que los números de Catalán satisfacen la recurrencia

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$$

- c) Cuente los caminos en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con movimientos $(+0, +1)$ y $(+1, +0)$ que parten en el punto $(0, 0)$ y terminan en (n, n) .
- d) Muestre que los caminos que parten de $(1, 0)$ y terminan en (n, n) , pero que sí pasan por debajo de la recta $y = x$ son la misma cantidad que los caminos que comienzan en $(0, 0)$ pero terminan en $(n+1, n-1)$.
- e) Concluya que $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

P2) Decimos que un conjunto A es *egocéntrico* si contiene a $|A|$.

- a) ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ son egocéntricos?
- b) Diremos que un conjunto es *egocéntrico minimal* si es egocéntrico y no contiene a otro conjunto egocéntrico como subconjunto propio. Encuentre una recurrencia para contar los subconjuntos egocéntricos minimales de $\{1, \dots, n\}$ y soluciónela.

P3) Una permutación π de $\{1, \dots, n\}$ se dice *conectada* si no existe un k con $1 \leq k < n$ tal que $\pi(\{1, 2, \dots, k\}) = \{1, 2, \dots, k\}$. Si p_n es la cantidad de permutaciones *conectadas* de $\{1, \dots, n\}$, demuestre la siguiente recurrencia:

$$p_{n+1} = (n+1)! - \sum_{i=1}^n p_i (n+1-i)!$$

P4) BOGOSORT es un algoritmo de ordenación muy malo.

Algoritmo 1 BOGOSORT(A)

```
while  $A$  no está ordenado do  
    desordenar  $A$  con una permutación al azar  
end while
```

- a) Muestre que la probabilidad que el algoritmo termina es 1.
- b) En esperanza, ¿cuántas veces entra el algoritmo en el ciclo while?