CC3101 - Matemáticas Discretas para la Computación
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliar: Christian von Borries

Auxiliar N°4

23 de Abril de 2014

P1) De cuantas maneras se pueden sentar 8 personas en una fila si:

a) No hay restricción de ningún tipo.

b) Fulano y Mengano no quieren quedar juntos.

c) Hay 5 mujeres y tienen que quedar todas juntas.

d) Hay 4 parejas y todas quieren quedar sentadas juntas.

P2) Sea S un conjunto con n elementos.

a) (Control 3 2013-1) Defina $\mathcal{X}$ como el conjunto de todos los pares (A, B) tal que $A \subseteq B \subseteq S$. Demuestre que $|\mathcal{X}| = 3^n$.

b) Sea $\mathcal{X}_k$ el conjunto de todas las k-tuplas $(A_1, \ldots, A_k)$ tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq S$. Calcule $|X_k|$.

c) Sea $\mathcal{Y}_k$ el conjunto de todas las k-tuplas $(A_1, \ldots, A_k)$ tal que $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$. Calcule $|\mathcal{Y}_k|$.

P3) a) Sean k, n naturales con $k \leq n$. Calcule cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

si x_i son todos enteros positivos.

b) Una **composición** del número n es una forma de escribir n como la suma de una secuencia de enteros positivos. (El orden sí importa, por ejemplo 1+2=3 y 2+1=3 son composiciones distintas del número 3.) Muestre que n tiene 2^{n-1} composiciones.

P4) (El problema de Chevalier de Méré)

Durante el año 1717, en Francia, era común en los juegos de azar apostar al evento “saldrá al menos un uno en cuatro tiros de dado”. Para variar un poco, algunos practicaban la variante de tirar dos dados simultáneamente 24 veces y apostaban al evento “al menos una vez el resultado será dos unos”. Según el razonamiento de Chevalier de Mére, dos unos en dos tiros son $\frac{1}{6}$ veces menos probables que un uno en un tiro (y esto es correcto). Luego, pensaba de Mére, si tiro los dos dados 6 veces ambas probabilidades son iguales. Y para simular tirar un dado 4 veces, multiplico esto 4 veces, así que tiro ambos dados 24 veces y así en ambos juegos la probabilidad de ganar es la misma. Sin embargo, consistentemente salía ganando con el primer juego y perdiendo con el segundo. Acudió a Fermat y Pascal para una explicación de sus pérdidas.

a) Calcule la probabilidad del evento “al tirar 4 dados sale al menos un uno”.

b) Calcule la probabilidad del evento “al tirar 24 veces dos dados salen al menos una vez dos unos”.

c) ¿Dónde está el error del razonamiento de de Mére?

Paréntesis: El **método probabilista** es un método no constructivo para demostrar existencia, usado principalmente en combinatoria. Se demuestra la existencia de un objeto la siguiente forma: Si A es un evento, entonces

$$\mathbb{P}(A) > 0 \implies A \neq \emptyset$$

A pesar de usar probabilidades, la conclusión final de existencia es *determinista*. Veamos algunos ejemplos:

P5) Sean $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de tamaño k de un conjunto A y suponga que $n < 2^{k-1}$. Muestre, usando el método probabilista, que existe una partición $A = R \cup B$ tal que para $i = 1, \ldots, n$

$$A_i \cap R \neq \emptyset \text{ y } A_i \cap B \neq \emptyset$$

En otras palabras, muestre que se puede colorear cada elemento de color rojo o blanco de tal forma que A_i tenga al menos un elemento rojo y uno blanco.

P6) En un torneo, n jugadores juegan todos contra todos, o sea hay en total $\binom{n}{2}$ partidos en los que siempre hay un ganador y un perdedor. Un torneo se dirá k-interesante si para cada subconjunto de jugadores S de tamaño k existe un jugador del torneo que venció a todos los jugadores de S. Muestre que, para k fijo y n suficientemente grande, existe un torneo k-interesante.

P7) Pruebe la identidad combinatorial de Fermat combinatorialmente:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}$$