CC3101 - Matemáticas Discretas para la Computación
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliar: Christian Von Borries

Auxiliar N°2

9 de Abril de 2014

P1) a) Demuestre que, si se tiene un conjunto de n lineas en el plano, tal que entre ellas no hay dos paralelas ni tres que se intersecten en el mismo punto, entonces ellas dan lugar a $\frac{n^2+n+2}{2}$ regiones.

b) Usando lo anterior, demuestre que si se tiene un conjunto de n planos en el espacio tridimensional, tal que entre ellos no hay dos planos paralelos ni tres que se intersectan en la misma recta, entonces ellas dan lugar a $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ regiones en el espacio.

P2) Sea $f : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ una función tal que $f(1,1) = 2$ y para todo $n, m \geq 1$ se tiene que

$$f(n+1, m) = f(n, m) + 2(n+m)$$
$$f(n, m+1) = f(n, m) + 2(n+m-1)$$

Demuestre por inducción que $f(n, m) = (n+m)^2 - (n+m) - 2m + 2$, para todo $n, m \geq 1$.

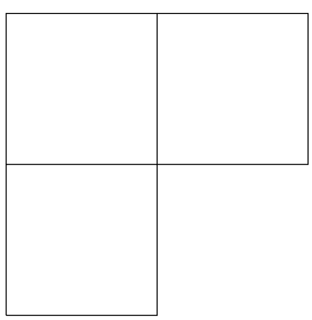
P3) Sea n un número natural cualquiera. Definimos $d_i(n)$ como el dígito que aparece en la posición i en n, con $d_1(n)$ el dígito más significativo, por ejemplo $d_3(1850) = 5$. Demuestre que para cualquier n con k dígitos existe un r natural tal que:

$$n - \sum_{i=1}^{k} d_i(n) = 9r$$

O sea que n menos la suma de sus dígitos siempre es múltiplo de 9.

P4) Suponga que entre cada par de ciudades de un país existe un camino de un sentido que las conecta en una dirección o la otra, pero no ambas. Demuestre utilizando inducción que existe una ciudad que puede ser alcanzada desde cualquier otra ciudad ya sea de forma directa o pasando por exactamente una ciudad diferente.

P5) Un *trominó* es una figura de dominó, pero agregándole un tercer bloque, como en la figura.



Un trominó.

Considere un tablero de $2^n \times 2^n$ al que le falta una casilla. Muestre por inducción que se puede teselar este tablero con trominós.